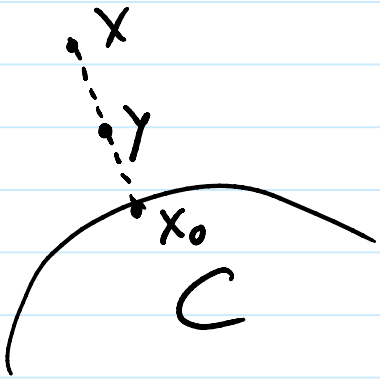
Lösungen Blatt 3

Freitag, 14. Juni 2019 18:08

A1 a)

Sei X CAT(0), $x \in X$, C konvex in X
y auf Geod. von x nach $\mathrm{proj}_C(x)$.

<u>z.z.</u> $\mathrm{proj}_C(y) = \mathrm{proj}_C(x) =: x_0$



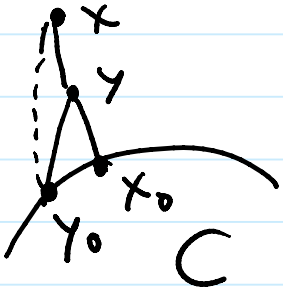
Ann $\mathrm{proj}_C(y) =: y_0 \neq x_0$.

Dann ist $d(y, y_0) < d(y, x_0)$,
weil $\mathrm{proj}_C(y)$ eindeutig mit
$d(y, \mathrm{proj}_C(y)) = d(y, C)$.

Dann ist aber einerseits (weil y auf Geod. von x nach x_0 liegt

$$d(x, C) = d(x, x_0) = d(x, y) + d(y, x_0)$$

aber andererseits



$$d(x, C) \overset{y_0 \in C}{\leq} d(x, y_0) \leq d(x, y) + d(y, y_0)$$
$$\underset{\text{s.o.}}{<} d(x, y) + d(y, x_0) \quad \lightning$$

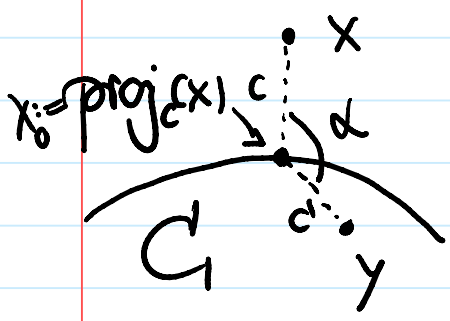
$\square$

A1 b)

Sei $x \notin C \subset X$ CAT(0).
$C \ni y \neq \mathrm{proj}_C(x)$

z.z. $d(x, y) =: d_1 > \mathrm{II}$

$\underline{2.7.}$ $\angle_{\mathrm{proj}_C(x)}(x,y) =: \alpha \geq \frac{\pi}{2}$



Nach Definition ist der gesuchte Winkel α impl. geg. durch

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{d(c(t), c'(t))}{2t}$$

Wenn $\alpha < \frac{\pi}{2}$, dann kann man Punkte x' auf $[x, x_0)$ und y' auf $[y, x_0)$ finden, so dass gilt:

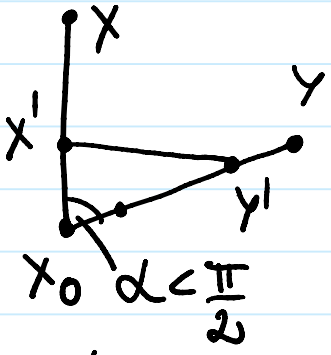
$$\overline{\measuredangle}_{x_0}(x', y') < \frac{\pi}{2}.$$

Vergleichswinkel im Vergleichsdreieck

Das gilt wegen Kor zu 6.16, weil da gezeigt:

$$\angle_a(c, c') = \lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \overline{\measuredangle}_a(c(s), c'(t)).$$

Aus der CAT(0) Eigenschaft folgt dann:

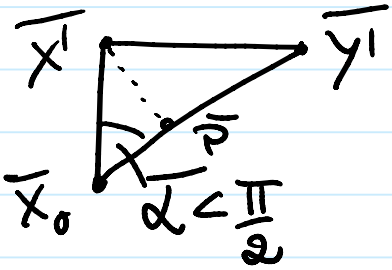


$\exists\, p \in [x_0, y] \subset C$ s.d.

$$\underline{d(p, x') < d(x_0, x')}. \quad (*)$$

Weil im euklid. Vergleichsdreieck der Fußpunkt von $\overline{x'}$ auf der Strecke $\overline{x_0 y}$

Vergl. Dreieck



Wenn der Projektionspunkt $\bar{x}'$ auf der Strecke $\bar{x}_0\bar{y}$ liegt, wenn $\bar{\alpha} < \frac{\pi}{2}$ ist, ist $d(\bar{x}', \bar{p}) < d(\bar{x}', \bar{x}_0)$

und somit für p mit Vergleichspkt $\bar{p}$ dann

$$d(x', p) \underset{\text{CAT}(0)}{\leq} d(\bar{x}', \bar{p}) < d(\bar{x}_0, \bar{x}') = d(x_0, x')$$

Beh (*) widerspricht A1 a) $\square$

$\boxed{A3}$ Bz. Parallelität von Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Reflexivität: $c_1 \| c_1$ klar wegen $d(c_1, c_1) \equiv 0$.
Symmetrie: folgt aus $d(x,y) = d(y,x)$.

Transitivität:
Seien $c_1 \| c_2$ und $c_2 \| c_3$.

Betrachte $\varphi(t) := d(c_1(t), c_3(t))$.

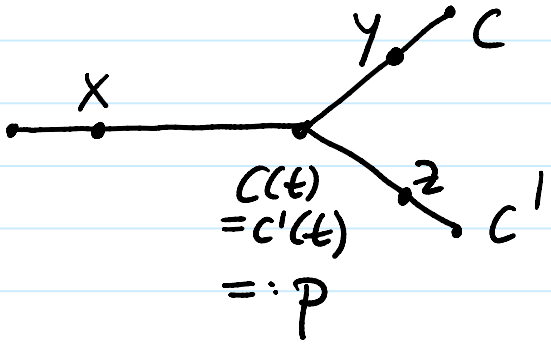
Weil die Metrik konvex ist ist $\varphi(t)$ konvex.
Weiter ist $\varphi(t)$ beschränkt, weil

$$0 \leq \varphi(t) = d(c_1(t), c_3(t))$$
$$\leq \underbrace{d(c_1(t), c_2(t))}_{= \text{const}} + \underbrace{d(c_2(t), c_3(t))}_{= \text{const}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=\text{const}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=\text{const}}$$

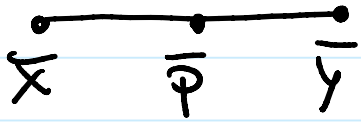
$\Rightarrow \Psi(t)$ ist konstant. $\square$

A4 a) Ann es gibt Geodätische c und c', die sich teilen, d.h. $c|_{[0,t]} = c'|_{[0,t]}$ aber $c(s) \neq c'(s)$ für $s > t$.



Die $(\delta+1)$-VB liefert dann für x, y, z, p wie im Bild:

$$\measuredangle_p(x,y) + \measuredangle_p(y,z) + \measuredangle_p(z,x) > 2\pi$$



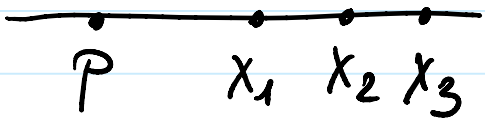
$\rightsquigarrow \measuredangle_{\bar{p}}(\bar{x},\bar{y}) = \pi$ $\square$

A4 b)

1. $\mathbb{R}$ ist als Bild einer Submetrie von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Projektion auf 1. Koordinate) ein CBB(0) Raum und somit CBB(κ) $\forall \kappa < 0$.

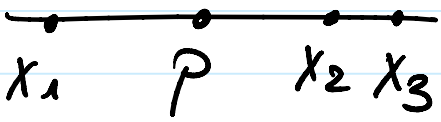
CBB(κ) $\forall \kappa < 0$.

$\mathbb{R}$ ist aber CBB(κ) $\forall \kappa$, weil die Winkelsumme in der (3+1)-VB immer 0 oder 2π ist:



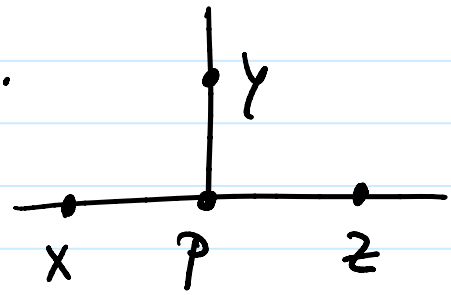
$0+0+0 \leq 2\pi$

oder



$\pi+\pi+0 \leq 2\pi$

2.



hier ist

$\overline{\measuredangle}_P(x,y) + \overline{\measuredangle}_P(y,z) + \overline{\measuredangle}_P(z,x)$

$= \pi + \pi + \pi > 2\pi$

also nicht CBB(κ) für bel. κ.

$\Rightarrow$ Graphen haben keine untere Krümmungsschranke