

Kapitel 6 Isometrien von CAT(0)-Räumen

CAT(0) Räume haben ein vergleichsweise sares Verhalten in Bezug auf ihre Isometrien.

Mit anderen Worten: die CAT(0) Eigenschaft hat Konsequenzen für die Isometriegruppen solcher Räume.

Def 6.1 (X, d) metr. Raum, G eine Gruppe mit isom. Wirkung auf X , d.h. wir fixieren eine Wirkung $G \curvearrowright X$ also eine Abb. $\varphi: G \rightarrow (\text{Iso}(X))$. Wir definieren:

- die displacement-Funktion

$$d_g: X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d(x, gx)$$

- $l_g = \inf_{x \in X} (d_g(x))$ die Translationlänge von g

$$l: G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

- $\text{Min}(g) = \{x \in X \mid d_g(x) = l_g\}$

Minimalmenge (das "min-set") von g

- $\text{Min}(G) = \bigcap_{g \in G} \text{Min}(g)$.

Def 6.2 Wir nennen ein $g \in G$, $G \curvearrowright X$,

Def 6.2 Wir nennen ein $g \in G$, $G \curvearrowright X$,

a) halbeinfach, wenn $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$

b) parabolisch, falls $\text{Fix}(g) = \emptyset$.

c) elliptisch, wenn $l_g = 0$, d.h. g hat einen Fixpunkt

d) hyperbolisch, wenn $l_g > 0$ ist.

Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ heißt halbeinfach, wenn alle $g \in G$ halbeinfach sind.

Bsp 6.3

1) X vollständiger CAT(0) Raum
und $G \curvearrowright X$ hat eine beschränkte Bahn.

$\Rightarrow G$ besteht aus elliptischen Elementen.

\uparrow Satz über beschränkte Bahn \Rightarrow Fixpunkt

Weiteres gilt: $\text{Fix}(G) = X^G = \text{Fixpunkte}$
 $= \{x \in X \mid g(x) = x \ \forall g \in G\}$
 $\neq \emptyset$.

2) $X = \mathbb{R}^n$ mit eukl. Metrik.

$g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow g(x) = Ax + t$

mit $t \in \mathbb{R}^n, A \in O(n)$

orthogonal
d.h. $a^{-1} = a^T$

Dann kann man nachrechnen

$$d_g(x) = \|(A - \mathbb{1})x + t\|_2.$$

Wir wollen sehen, dass $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$.

D.h. notwendig ist $\exists x \in \mathbb{R}^n$ mit

D.h. gesucht ist $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$d(y, g y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} d_g(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} d(x, g x).$$

Setze $H_0 = (A - \mathbb{1}) \cdot \mathbb{R}^n$ und $H_1 = H_0^\perp$.

Dann ist $\mathbb{R}^n = H_0 \oplus H_1$

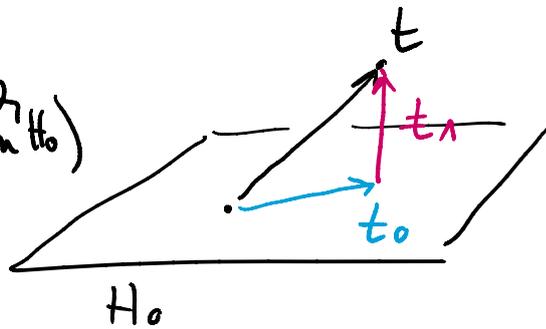
Setze $t = t_0 + t_1$ mit $t_i \in H_i$.

Wähle $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$-(A - \mathbb{1})v = t_0 \quad (\text{geht nach Wahl von } H_0)$$

$$\Rightarrow v \in \text{Kern}(g).$$

$$\text{Und } l_g = \|t_1\|_2.$$



Das Element g ist also halbeinfach.

Lemma 6.4

Gegeben eine isom. Wirkung $G \curvearrowright X$ und $g \in G$. Dann gilt

a) $\text{Kern}(g)$ ist $\langle g \rangle$ -invariant

b) $\text{Kern}(G)$ ist G -invariant

c) $\forall a \in \text{Iso}(X)$ ist $l_{a g a^{-1}} = l_g$
 und $\text{Kern}(a g a^{-1}) = a \text{Kern}(g)$.

Ist also $a g = g a$ so ist $\text{Kern}(g)$ $\langle a \rangle$ -invar.

Beweis:

a) Sei $x \in \text{Kern}(g)$. Dann ist nach Def. $l_g = d(x, g(x))$.

Beweis:

a) Sei $x \in \text{Min}(g)$. Dann ist nach Def. $l_g = d(x, g(x))$.

Weil G isometrisch wirkt gilt

$$d(g(x), g^2(x)) = d(x, g(x)) = l_g.$$

Somit ist $g(x) \in \text{Min}(g)$.

c) Für ein $a \in \text{Iso}(X)$ ist

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} d(x, aga^{-1}(x)) = d(\overset{\uparrow}{a^{-1}x}, g(\overset{\uparrow}{a^{-1}x})) = d(\overset{\uparrow}{y}, g(\overset{\uparrow}{y})) \\ \parallel \\ d_{aga^{-1}}(x) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \parallel \\ d_g(y) \end{array}$$

Realisiert y die Translationslänge von g (also $d(y, gy) = l_g$) so realisiert x die Translationslänge von aga^{-1} .

Es ist also $l_g = l_{aga^{-1}}$.

Ist nun $x \in \text{Min}(aga^{-1})$ so ist

$a^{-1}x \in \text{Min}(g)$ wegen $(*)$

und damit $x \in a \cdot \text{Min}(g)$.

#

b) $\text{Min}(G) \stackrel{z.z.}{=} \bigcap_{g \in G} \text{Min}(g)$.

Wegen c) ist $\text{Min}(g) = \text{Min}(hg h^{-1})$.

Weil $G \curvearrowright G$ einfach die Elemente permutiert folgt die Beh. \square

Satz 6.5

Sei X CAT(0) Raum. Dann ist die

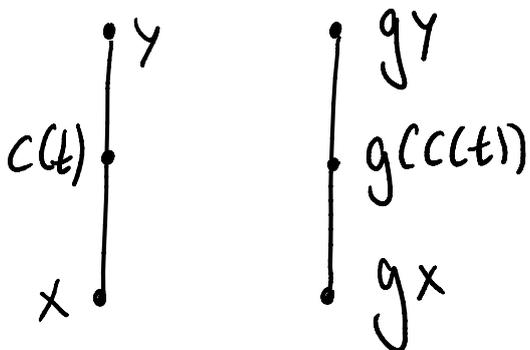
Sei X CAT(0) Raum. Dann ist die Funktion $d_g: X \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $g \in \text{Iso}(X)$ konvex.

Die Menge $X_{\leq r} = d_g^{-1}([0, r])$ ist $\forall r$ konvex. Insbesondere ist $\text{Ein}(g)$ konvex.

Beweis: Wir zeigen zunächst Konvexität von d_g : d.h. wir beweisen, dass für alle geodätische $c: [0, r] \rightarrow X$ die Verkettung $d_g \circ c: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist.

Seien $x, y \in X$ gegeben und sei $c: [0, d] \rightarrow X$ geodätische mit $c(0) = x$ und $c(d) = y$.

Das Bild $g \circ c: [0, d] \rightarrow X$ (geg durch $g \circ c(t) = g(c(t))$) unter $g \in \text{Iso}(X)$ ist wieder geodätische. Wegen Konvexität des Metriks in CAT(0) Räumen gilt dann folgende Ungl.:



$$(*) \quad d(c(d \cdot s), g \circ c(ds)) \leq (1-s) d(x, gx) + s d(y, gy)$$

für $0 \leq s \leq 1$. Das bedeutet aber gerade

für $0 \leq s \leq 1$. Das bedeutet aber gerade
 $d_g(c(s)) \leq (1-s) \cdot d_g(x) + s \cdot d_g(y)$.

Das Urbild $d_g^{-1}([0, \Gamma]) = \{x \in X \mid d(x, g(x)) \leq \Gamma\}$.

Liegt p auf einer Geodätischen c von x
 nach y mit $x, y \in d_g^{-1}([0, \Gamma]) = X_{\leq \Gamma}$

so ist $p = c(s)$ für ein $s \in [0, 1]$ und
 wegen (*) ist

$$\begin{aligned} d(p, gp) &\leq (1-s) \overbrace{d(x, gx)}^{\leq \Gamma} + s \overbrace{d(y, gy)}^{\leq \Gamma} \\ &\leq (1-s)\Gamma + s\Gamma = \Gamma. \end{aligned}$$

Also ist $p \in X_{\leq \Gamma}$. Somit ist $X_{\leq \Gamma}$ konvex.

$\text{Min}(g) = \{x \in X \mid d_g(x) = l_g\}$ ist auch

konvex, weil $X_{\leq \Gamma} = \emptyset \quad \forall \Gamma < l_g$. \square

Lemma 6.6

Sei X (ATC)Raum, $C \subset X$ konvex, vollst.

Sei weiter $g \in \text{Iso}(X)$ und $gC = C$.

Dann gilt:

1) $l_g = l_g|_C$

2) g halbeinfach $\Leftrightarrow g|_C$ halbeinfach

Beweis-Skizze:

Betrachte $\text{proj}_C : X \rightarrow C$.

Man kann zeigen, dass $\forall x \in X$ gilt:
 $g \cdot \text{proj}_C(x) = \text{proj}_C(gx)$ und

$$d(gx, x) \geq d(g \text{proj}_C(x), \text{proj}_C(x)).$$

$$\Rightarrow \text{proj}_C(\text{Min}(g)) = \text{Min}(g) \cap C = \text{Min}(g|_C). \quad \square$$

Lemma 6.7

X vollst. (ATC) und $g \in \text{Iso}(X)$. Dann gilt:
 g^m ist elliptisch $\Leftrightarrow \langle g \rangle$ hat beschränkte Bahn in X .
d.h. $lg=0$, d.h. \exists Fixpt

Beweis " \Leftarrow " hat g eine beschränkte Bahn,

so gilt mit BT-Fixpunktsatz, dass g einen Fixpunkt besitzt und daher die Isometrie g selbst elliptisch ist

" \Rightarrow " Ann g^m ist elliptisch für ein m .

" \Rightarrow Ann g^m ist hyperbolisch für $m > 0$...

Sei x ein Fixpunkt von g^m .

Dann ist die $\langle g \rangle$ -Bahn von x endlich, weil für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$g^k \cdot g^m \cdot x = g^k \cdot x$$

und somit (als Familie)

$$\langle g \rangle \cdot x = \{x, g \cdot x, \dots, g^{m-1} \cdot x\}$$

für festes m .

Also ist $\langle g \rangle \cdot x$ beschränkt. \square

Satz 6.8 (hyperb. Elite & Achsen)

Sei X CAT(0) und $g \in \text{Iso}(X)$.

Dann sind äquivalent:

1) g ist hyperbolisch (i.e. $l_g > 0$)

2) Es existiert eine g -invariante Geodätische $c: \mathbb{R} \rightarrow X$ auf der g als nicht-triviale Translation wirkt. D.h. $g \cdot c(t) = c(t+a)$ für ein festes $a > 0$.

Wir nennen $c(\mathbb{R})$ Achse von g .

Beweis: 2) \Rightarrow 1) Dient nur Lp. (6.6.1)

Beweis: 2) \Rightarrow 1) folgt aus \tilde{L}_e (6.6.1)
mit $C = C(\mathbb{R})$ konvexe Menge.

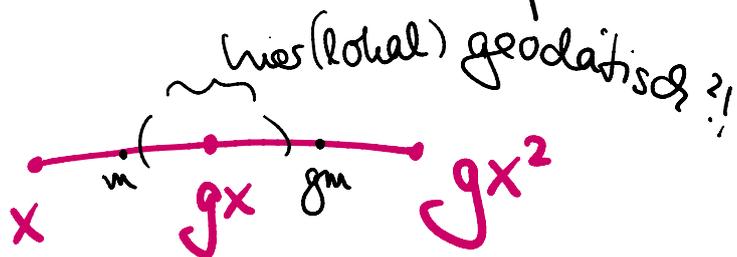
1) \Rightarrow 2) z.z. Jedes $x \in \text{Lin}(g)$ liegt
auf einer (festen) Achse $C(\mathbb{R})$ von g .
Diese Achse ist die Vereinigung der
geodätischen Stücke $[g^n x, g^{n+1} x]$
 $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Da lokale Geodätische in einem $\text{AT}(G)$
Raum automatisch (globale) Geodätische
sind, reicht es zu zeigen, dass das
geodätische Segment von x nach $g^2 x$
Vereinigung von $[x, g x]$ mit $[g x, g^2 x]$ ist.

Die letzte Aussage ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} d(m, g m) &= d(m, g x) + d(g x, g m) \\ &= 2 d(m, g x). \end{aligned}$$

wobei m Mittelpunkt von x und $g x$.



Das $\text{Hom}_{\text{ad}} \text{Lin}(a)$ ist konvex.

Die Menge $\text{Fix}(g)$ ist konvex.

Damit ist $m \in \text{Fix}(g)$ weil x und gx
in $\text{Fix}(g)$ liegen. (nach Ann) (wegen $\langle g \rangle$ -invar.)

So gilt:

$$d(m, gm) = d(x, gx) = l_g.$$

Aber $d(x, gx) = 2d(x, m)$ nach Def. Mittelpt.

Also gilt $d(m, gm) = 2d(x, m)$. Mit der
oben beschriebenen Äquivalenz gilt
dann 2) □

Bem 6.9

1) Obiger Beweis zeigt, dass durch jedes
 $x \in \text{Fix}(g)$ eine eindeutige Achse geht,
wenn g hyperbolisch ist.

2) Es ist auch klar aus dem Beweis,
dass $a = l_g$ ist.

Kor 6.10

X CAT(0), $g \in \text{Iso}(X)$ hyperbolisch.
Dann ist auch g^k hyperbolisch $\forall k \neq 0$.

Beweis:

Ist g hyperbolisch, so besitzt g $\forall x \in \text{Fix}(g)$
eine Achse

Ist g hyperbolisch, so besitzt g eine Achse. Diese Achse ist auch Achse für g^k . \square

Satz 6.11 (Parallele Achsen)

Sei X CAT(0) Raum. Sei g hyperbolische Isometrie von X , dann gilt: $(l_g > 0)$

Die Achsen von g sind paarweise parallel und ihre Vereinigung ist $\text{Fix}(g)$.

Beweis:

z.z. Sind $c, c': \mathbb{R} \rightarrow X$ Achsen von g , dann sind c und c' parallel.

Wegen 5.7 2) und der Beobachtung, dass $a = l_g$ ist folgt für beliebiges t :

$$g.c(t) = c(t + l_g) \text{ und } g.c'(t) = c'(t + l_g).$$

Die Funktion $t \mapsto d(c(t), c'(t))$ ist dann nicht nur konvex (weil d konvex)

sondern auch periodisch, denn

$$\begin{aligned} \psi(t + l_g) &= d(g.c(t), g.c'(t)) \\ &= d(c(t), c'(t)) = \psi(t). \end{aligned}$$

$$\vec{g}(\text{iso}(x)) = d(\check{c}(t), \check{c}'(t)) = \psi(t).$$

Konvexe, periodische, stetige Fkt von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant.

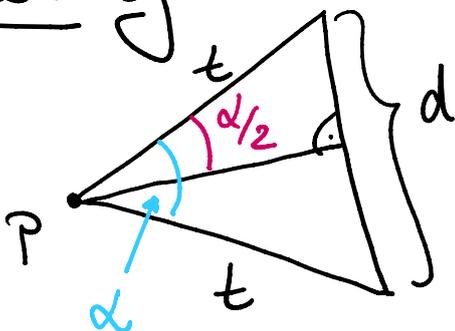
Also sind c und c' parallel.

Wir hatten gesehen (5.8), dass durch alle $x \in \text{Lin}(g)$ eine Achse existiert.

Also ist $\text{Lin}(g)$ Vereinigung paralleler Achsen. \square

Um die Existenz flacher Teilmengen in einem CAT(0) Raum zu untersuchen benötigen wir den Begriff des Winkels.

Einherung



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d/2}{t} = \frac{d}{2t}$$

||
Gegenkathete
Hypotenuse

in einem rechtwinkl. Dreieck

Def 6.12 (Winkel zw. Geodätischen) klein!

Sei X CAT(0)-Raum und $c, c': [0, t_0] \rightarrow X$

Sei X CAT(0)-Raum und $\gamma, \gamma': [0, t_0] \rightarrow X$
 Geodätische mit $\gamma(0) = \gamma'(0) = p$.

Wir definieren den Winkel $\alpha = \angle_p(\gamma, \gamma')$
 zwischen den Geodätischen γ und γ'
 durch $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2t}$.

Für diese implizite Def von α betrachten
 wir nur Winkel zwischen 0 und π .

Wohldefinietheit:

Wegen Konvexität des Metrik ist

$$d(\gamma(s), \gamma'(s)) \leq d(\gamma(t), \gamma'(t)) \quad \forall 1 \leq s < t \leq t_0$$

$$\text{auch gilt } \frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2} \leq \frac{d(\gamma(t), p) + d(\gamma'(t), p)}{2t} = 1$$

↑
A-Ungl

Also existiert das GW und α ist wohldefiniert.

Def 6.13 (Winkel zw. Punkten, Vergleichswinkel)

Sei X CAT(0) Raum.

Setze $\angle_p(x, y) := \angle_p(\gamma|_{[0, t_0]}, \gamma'|_{[0, t_0]})$
 wobei $\gamma: p \rightarrow x$ und $\gamma': p \rightarrow y$ Geodätische
 sind und t_0 klein gewählt ist.

Der Vergleichswinkel $\bar{\angle}_p(x, y)$ zu $\angle_p(x, y)$ ist geg
 durch $\bar{\angle}_p(x, y) := \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{y})$ gemessen
 in \mathbb{E}^2

... ..

durch $\angle_p(x,y) = \angle_p(\bar{x},\bar{y})$ in \mathbb{E}^2
 wobei $\Delta(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ Vergleichsdreieck von
 $\Delta(p,x,y)$ ist.

Lemma 6.14

Ist X CAT(0) und $x,y,p \in X$ so gilt

$$\angle_p(x,y) \leq \bar{\angle}_p(x,y)$$

d.h. Winkel in CAT(0) Räumen sind höchstens
 so groß wie ihre Vergleichswinkel in \mathbb{E}^2 .

Beweis: UA \square

Lemma 6.15

X CAT(0) Raum, $p \in X$.

Seien $x,y \in X \setminus \{p\}$. Dann gilt folgendes:

Ist $\Delta(\bar{p},\bar{x},\bar{y}) =: \bar{\Delta}$ Vergleichsdreieck von

$\Delta := \Delta(p,x,y)$ und ist ein $\tilde{x} \in \mathbb{E}^2$ geg.

mit $d(x,p) = \|\tilde{x} - \bar{p}\|_2$ und

$$\angle_{\bar{p}}(\tilde{x},\bar{y}) = \angle_p(x,y)$$

dann gilt $\|\bar{y} - \tilde{x}\|_2 \leq d(x,y)$.

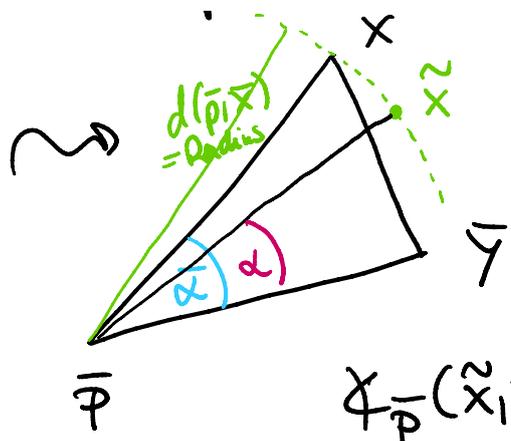
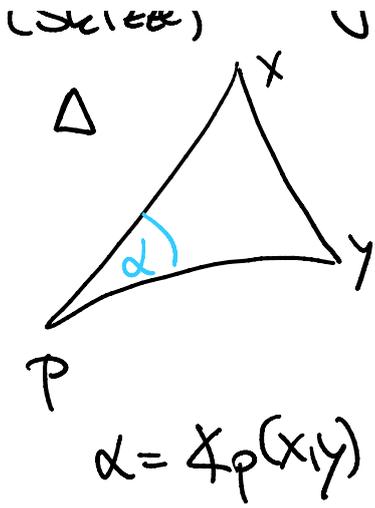
Beweis: Geg. $\Delta = \Delta(p,x,y)$ und $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$

(Skizze)

\wedge \wedge

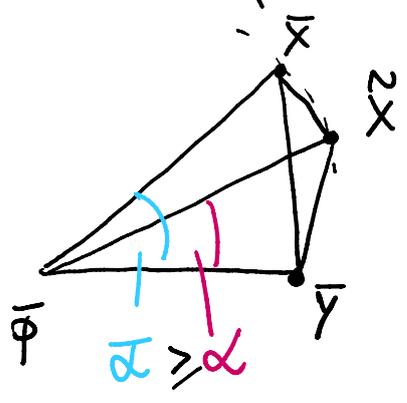


mit $\bar{d} \geq d$.



$\angle_{\bar{P}}(\tilde{x}, \bar{y}) = \underline{\alpha}$
 $\angle_{\bar{P}}(\bar{y}, \tilde{x}) = \bar{\angle}_P(x, y) = \bar{\alpha}$

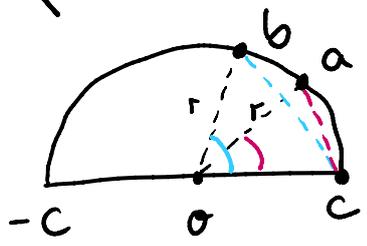
Betrachte $\bar{P}, \bar{x}, \tilde{x}, \bar{y}$:



Ann $d(\bar{y}, \tilde{x}) > d(x, y)$.

Das widerspricht den üblichen Regeln der euklidischen Geometrie,

denn: man kann nachrechnen, dass für Punkte a, b auf einem Halbkreisbogen



gilt: $\underline{\angle_0(c, a)} < \underline{\angle_0(c, b)}$
 $\Leftrightarrow d(c, a) < \underline{d(c, b)}$

Das ist aber genau unsere Situation oben, weil $d(\tilde{x}, \bar{y}) = d(x, y)$ folgt Beh. \square

Lemma 6.16

$X \text{ CAT}(0)$, $p \in X$, seien weiter $C: p \rightsquigarrow u$
 ... Randlängere.

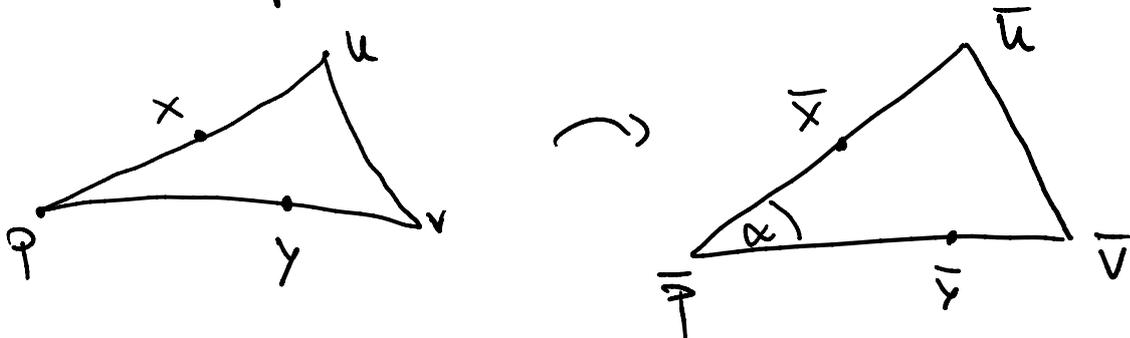
X CAT(0), $p \in X$, wenn $u, v \in X$
 und $c: p \rightarrow u$ geodätische.

Dann gilt $\forall s, t > 0$ im Def.-bereich von c, c' :

$$\angle_p(c, c') \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \angle_p(c(s), c'(t)) \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \angle_p(u, v)$$

Beweis: Setze $c(s) =: x$ und $c'(t) =: y$.

Betrachte Vergleichsdreieck $\Delta(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ zum
 Dreieck $\Delta(p, u, v)$:



Es ist dann $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq d(x, y)$ weil X^c CAT(0).

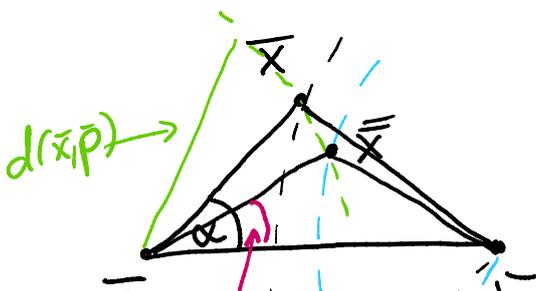
Setze $\alpha := \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{y})$ im euklid. \mathbb{R}^2 .

Im Vergleichsdreieck $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ von
 $\Delta(p, x, y)$ mit $d(p, y) = d(\bar{p}, \bar{y})$

$$d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x}) \text{ und}$$

$$d(x, y) = d(\bar{y}, \bar{x})$$

muss dann der Winkel $\bar{\alpha} < \alpha$ sein.



Damit gilt $\textcircled{1}$

$\textcircled{2}$ folgt aus 6.14.

□

$$\Phi_p(C_1, C_3) > \Phi_p(C_1, C_2) + \Phi_p(C_2, C_3) + 3\delta.$$

Weiter existiert $\varepsilon > 0$ s.d. $\forall 0 < s, t \leq \varepsilon$

$$\text{gilt: } \overline{\Phi}_p(C_1(s), C_2(t)) < \Phi_p(C_1, C_2) + \delta$$

$$\overline{\Phi}_p(C_2(s), C_3(t)) < \Phi_p(C_2, C_3) + \delta.$$

$$\text{i.A. gilt } \overline{\Phi}_p(C_i(s), C_j(t)) \geq \Phi_p(C_i, C_j)$$

sind aber s, t klein, so ist die Abweichung zu $\Phi_p(C_i, C_j) < \delta$.

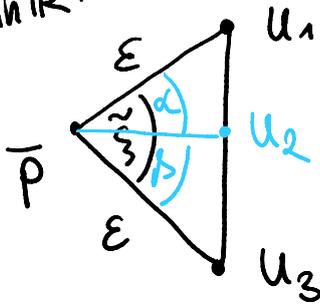
Betrachte Punkte \bar{p}, u_1, u_3 in \mathbb{R}^2 s.d. gilt:

$$\bullet \| \bar{p} - u_1 \|_2 = \varepsilon = \| \bar{p} - u_3 \|_2 \quad \text{und}$$

$$\bullet \overline{\Phi}_{\bar{p}}(u_1, u_3) = \tilde{\xi} \quad \text{wobei } \tilde{\xi} < \pi \quad \text{mit}$$

$$\xi = \overline{\Phi}_p(C_1(\varepsilon), C_3(\varepsilon)) > \tilde{\xi} > \Phi_p(C_1, C_3) - \delta.$$

in \mathbb{R}^2 :



Wähle dann u_2 auf der Strecke von u_1 nach u_3 so, dass

$$\alpha = \overline{\Phi}_{\bar{p}}(u_1, u_2) > \Phi_p(C_1, C_2) + \delta$$

$$\beta = \overline{\Phi}_{\bar{p}}(u_2, u_3) > \Phi_p(C_2, C_3) + \delta.$$

$$\text{Sei } \delta = \| \bar{p} - u_2 \|_2.$$

Wir haben dann:

$$\overline{\Phi}_p(C_1(\varepsilon), C_2(\delta)) < \Phi_p(C_1, C_2) + \delta < \alpha$$

$$\text{also gilt: } d(C_1(\varepsilon), C_2(\delta)) < \| u_1 - u_2 \|_2$$

$$\text{analog: } d(C_2(\delta), C_3(\varepsilon)) < \| u_2 - u_3 \|_2$$

ebenso: $d(C_2(\varepsilon), C_3(\varepsilon)) < \|u_2 - u_3\|_2$

und insgesamt

$d(C_1(\varepsilon), C_3(\varepsilon)) < \|u_1 - u_2\|_2 + \|u_2 - u_3\|_2 = \|u_1 - u_3\|_2$

Anderserseits gilt:

$\chi_p(C_1(\varepsilon), C_3(\varepsilon)) > \frac{1}{2}$

also $d(C_1(\varepsilon), C_3(\varepsilon)) > \|u_1 - u_3\|_2$



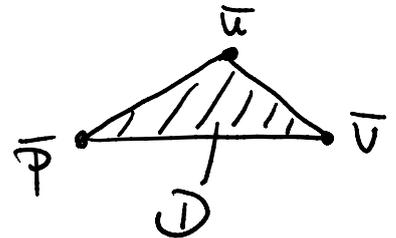
6.18 Satz vom flachen Dreieck.

$X \text{ CAT}(0)$, $p, u, v \in X$ mit $v \neq p \neq u$.

Sei $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ Vergleichsdreieck von $\Delta(p, u, v)$.

Sei weiter $D = \text{conv}(\bar{\Delta})$ in \mathbb{R}^2 .

Wenn $\chi_p(u, v) = \chi_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v})$

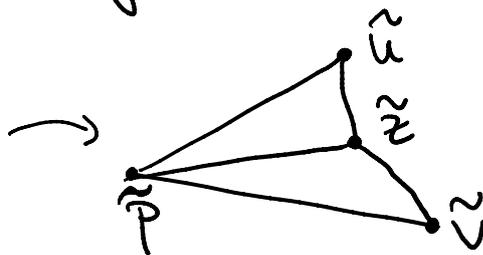
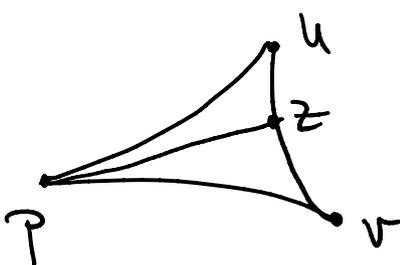


dann gibt es eine isometrische

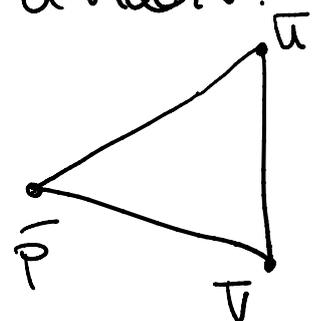
Einbettung $\psi: D \rightarrow X$ mit $\psi(\bar{u}) = u$, $\psi(\bar{v}) = v$
und $\psi(\bar{p}) = p$.

Beweis:

Sei z Punkt auf Geodätisches von u nach v .



&



Betrachte Vergleichsdreiecke $\Delta(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{z})$ und $\Delta(\hat{p}, \hat{v}, \hat{z})$ zu $\Delta(p, u, z)$ und $\Delta(p, v, z)$. Wähle Seite \bar{p}, \bar{z} gemeinsam.

Weiter sei $\Delta(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ Vergleichsdreieck von $\Delta(p, u, v)$.

$$\text{Dann gilt: } \bar{\chi}_p(u, z) + \bar{\chi}_p(z, v) \leq \bar{\chi}_p(u, v)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \chi_p(u, v) &\leq \chi_p(u, z) + \chi_p(z, v) \\ &\leq \bar{\chi}_p(u, z) + \bar{\chi}_p(z, v) \\ &\leq \bar{\chi}_p(u, v) = \chi_p(u, v). \end{aligned}$$

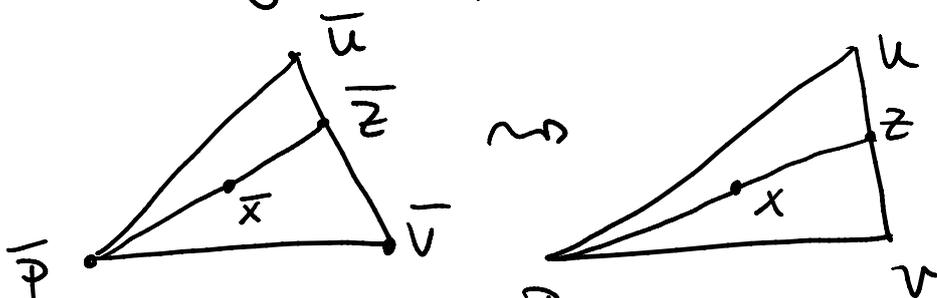
D.h. überall ist Gleichheit und damit sind $\Delta(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v})$ und $\Delta(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ kongruent.

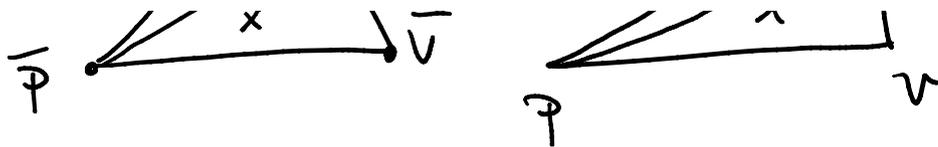
Insbes. ist $d(\tilde{z}, \tilde{p}) = d(z, p)$.

↑
Vergleichspunkt von z

Jetzt können wir eine Abb. $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow X$ definieren:

Im Vergleichsdreieck $\Delta(\bar{p}, \bar{u}, \bar{v})$ von $\Delta(p, u, v)$ bilde die Geodätische von \bar{p} nach \bar{z} auf die Geodätische von p nach z ab wobei \bar{z} Vergleichspunkt von z sei.

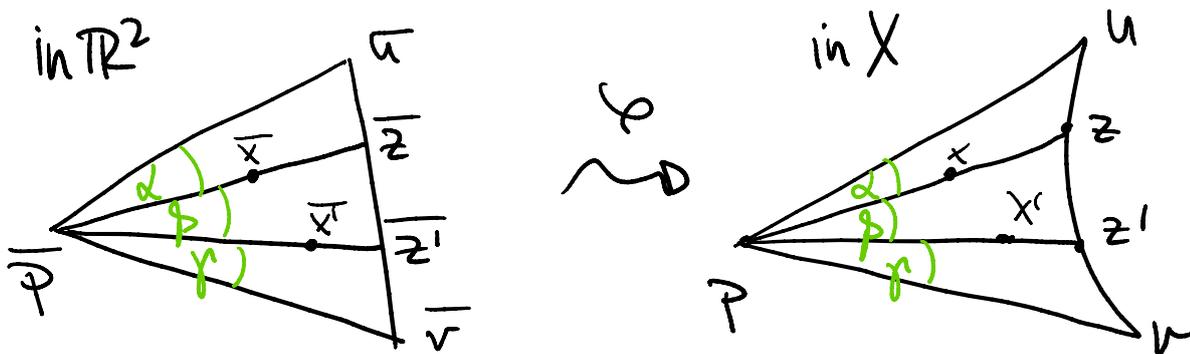




Wenn \bar{z} die ganze geodätische von \bar{u} nach \bar{v} durchläuft ist φ auf ganz \mathcal{D} definiert.

Noch zz. Das so definierte $\varphi: \mathcal{D} \rightarrow X$ ist eine Isometrie.

Betrachte z, z' auf der Strecke $u \rightsquigarrow v$.
Dann gibt es im Vergleichsdreieck $\Delta(\bar{p}, \bar{v}, \bar{u})$ Vergleichspunkte \bar{z}, \bar{z}' .



Nach obigen Überlegungen sind die Winkel α, β, γ in den beiden Dreiecken gleich, wenn beliebige $z \neq z'$ auf der Strecke von u nach v geg. sind.

Also ist jedes der drei Dreiecke in obigem Bild (linke Seite) ein Vergleichsdreieck und

$$d(x, x') \leq \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2. \quad \textcircled{\times}$$

Wäre $d(x, x') < \|\bar{x} - \bar{x}'\|$, so wäre auch

Wäre $d(x, x') < \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2$ so wäre auch
 $\angle_p(x, x') < \angle_p(\bar{x}, \bar{x}')$ - was nicht der

Fall ist. Also gilt „ $=$ “ in \textcircled{X} \square

Bem. Die Abb. ψ ist eindeutig bestimmt.
 (durch die Vor. definiert)

6.19 Satz vom flachen Viereck

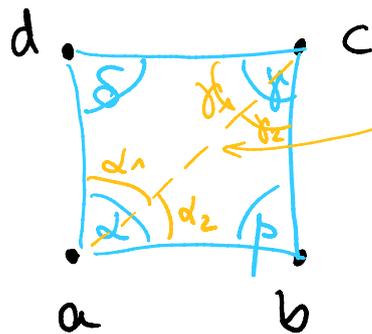
Sei $X \text{ CAT}(0)$, seien a, b, c, d in X und

Sei $\alpha = \angle_a(d, b)$

$\beta = \angle_b(a, c)$

$\gamma = \angle_c(d, b)$

$\delta = \angle_d(a, c)$



Hilfslinie
für Winkel
im
Beweis

Wenn $\alpha + \beta + \gamma + \delta \geq 2\pi$, dann ist

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$. Es gibt dann Punkte

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{R}^2$ mit konvexes Viereck

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine isometrische Einbettung

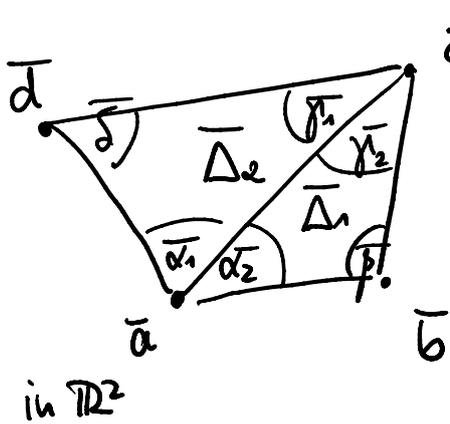
$\psi: D \rightarrow X$ mit $\psi(\bar{a}) = a, \psi(\bar{b}) = b$

$\psi(\bar{c}) = c$ und $\psi(\bar{d}) = d$.

Beweis: Wir beginnen mit zwei Vergleichsdreiecken
 zu $\Delta(a, b, c)$ und $\Delta(a, d, c)$:

$\bar{\quad}$ für die entsprechenden

in \mathbb{R}^2 , wenn $\bar{a} > a$.



Für die entsprechenden Winkel gilt:

$$\bar{\alpha} \geq \alpha, \quad \bar{\beta} \geq \beta$$

$$\bar{\alpha} := \alpha_1 + \alpha_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$\bar{\beta} := \beta_1 + \beta_2 \geq \beta_1 + \beta_2 = \beta.$$

Im euklidischen Viereck gilt $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{\delta} = 2\pi$

also muss auch $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ sein

und gelten, dass $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \bar{\alpha} \leq \pi$

sowie $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \bar{\beta} \leq \pi$.

Insbesondere ist $\bar{\alpha} \leq \pi$ und $\bar{\beta} \leq \pi$ und das euklidische Viereck ist konvex.

In jedem der beiden Dreiecke stimmt ein Winkel (nämlich δ bzw β) mit dem Vergleichswinkel überein. Wir können also $\varphi: \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2 \rightarrow X$

konstruieren, s.d. $\varphi_i := \varphi|_{\bar{\Delta}_i} \rightarrow \Delta_i$ gerade die

Isometrie aus Satz 6.17 ist. Hierbei sei

$$\Delta_1 := \Delta(a, c, d), \quad \Delta_2 := \Delta(a, b, c).$$

Wir müssen zeigen: φ ist Isometrie.

(*) d.h. z.z. ist $\forall \bar{x}_1 \in \bar{\Delta}_1$ und $\bar{x}_2 \in \bar{\Delta}_2$, dass für $x_i := \varphi_i(\bar{x}_i)$ gilt: $d(x_1, x_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$.

|| $x_1 - x_2 ||_2 < || \bar{x}_1 - \bar{x}_2 ||_2$

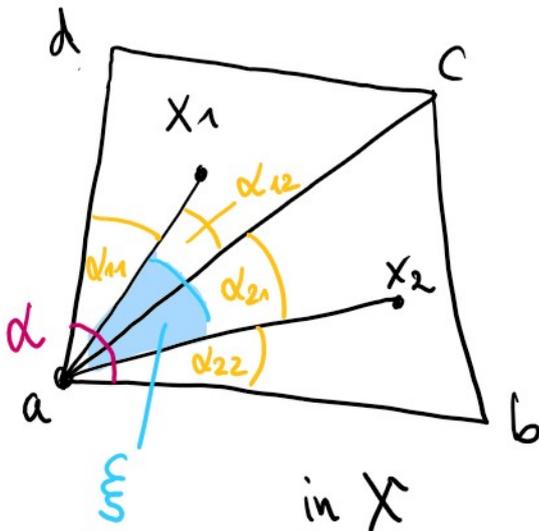
↳ diese Beh. folgt, wenn wir zeigen können,

$$\text{dass } \varphi_a(x_1, x_2) = \varphi_{\bar{a}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

weil für $d(x_1, x_2) < ||\bar{x}_1 - \bar{x}_2||_2$ folgt, dass

$$\varphi_a(x_1, x_2) < \varphi_{\bar{a}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

(Beachte: aus Konvexität des eukl. 4-Ecks folgt, dass $d(x_1, x_2) \leq ||\bar{x}_1 - \bar{x}_2||_2$ gilt.)



Sei also

$$\xi := \varphi_a(x_1, x_2).$$

Setze weiteres

$$\alpha_{11} := \varphi_a(d, x_1)$$

$$\alpha_{12} := \varphi_a(x_1, c)$$

$$\alpha_{21} := \varphi_a(c, x_2)$$

$$\alpha_{22} := \varphi_a(x_2, d).$$

Dann gilt: (mit Δ -Ungl für Winkel)

$$\alpha \leq \alpha_{11} + \xi + \alpha_{22} \leq \underbrace{\alpha_{11} + \alpha_{12}}_{= \alpha_1} + \underbrace{\alpha_{21} + \alpha_{22}}_{= \alpha_2} = \alpha.$$

Da Δ_i isomorph ist zu $\bar{\Delta}_i$ muss auch

$$\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} \text{ sein für } ij \in \{1, 2\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Somit ist } \varphi_a(x_1, x_2) &= d_{12} + d_{21} \\ &= \overline{d}_{12} + \overline{d}_{21} = \varphi_a(\overline{x}_1, \overline{x}_2). \end{aligned}$$

\Rightarrow Beh. (*) und der Satz ist bewiesen. \square

6.20 Satz vom flachen Streifen

Sei X CAT(0) und $c, c' : \mathbb{R} \rightarrow X$ Geodätische.

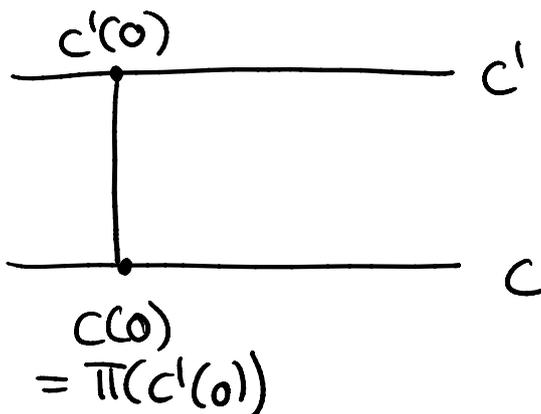
Ist $d(c(t), c'(t))$ konstant, dann gibt es eine isometrische Einbettung $\psi : [0, k] \times \mathbb{R} \rightarrow X$
 s.d. $\psi(0, t) = c(t)$ und $\psi(k, t) = c'(t)$
 $\forall t \in \mathbb{R}$ und ein festes $d_0 = \text{const.}$

$$\text{D.h. } \text{conv}(c(\mathbb{R}), c'(\mathbb{R})) \cong [0, k] \times \mathbb{R}$$

Beweis:

Schreibe $\pi : X \rightarrow c(\mathbb{R})$ für die Projektion auf die konvexe Menge $c(\mathbb{R})$.

Wir können annehmen, dass $\pi(c'(0)) = c(0)$.
 (sonst können wir c' entspr. umparametrieren.)



Nach Ann. ist dann

$$\begin{aligned} k &= d(c(0), c'(0)) \\ &= d(c(t), c'(t)) \quad \forall t. \end{aligned}$$

konvexe

$$= \pi(c'(0))$$

Betrachte jetzt $\forall n \in \mathbb{N}$ das ^{konvexe} Viereck V_n in X mit Ecken $c(n), c(-n), c'(n), c'(-n)$.

Man kann zeigen (vergl. ÜA), dass alle 4 Winkel in $V_n \geq \pi/2$ sind.

6.19

\Rightarrow V_n ist isometrisch zu einem euklid.

Vierecke mittels einer Abb. $\varphi_n: [-n, n] \times [0, k] \rightarrow X$.

$$\text{Wobei } \varphi_n(\pm n, 0) = c(\pm n)$$

$$\varphi_n(\pm n, k) = c'(\pm n).$$

Wegen Eindeutigkeit des φ_n folgt $\varphi_{n+1}|_{[-n, n]} = \varphi_n$

und wir erhalten $\varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$ eine

Isometrie wie beschrieben. □

6.21 Produktzerlegung

X CAT(0), $c: \mathbb{R} \rightarrow X$ Geodätische. Dann gilt:

$$(i) \quad X(c) := \left\{ x \in X \mid x \text{ auf Geodätischer } c' \text{ mit } c' \parallel c \right\}$$

$$= \bigcup_{c' \parallel c} c'(\mathbb{R})$$

ist konvexe Teilmenge von X und $\text{CAT}(0)$.

(a) Für $p \in c(\mathbb{R})$ sei

$$X(c)^p = \{ x \in X(c) \mid \pi(x) = p \}$$

$$X(c)^{\mathcal{P}} = \{ x \in X(c) \mid \pi(x) = \mathcal{P} \}$$

↑
Proj. auf $C(\mathbb{R})$.

Dann ist $X(c) \cong \mathbb{R} \times X(c)^{\mathcal{P}}$

mit euklid. Produktmetrik.

Beweis:

(1) Für zwei Punkte $x_1, x_2 \in X(c)$ seien c_1 und c_2 Geodätische parallel zu c mit $x_i \in c_i(\mathbb{R})$.

Dann ist mit 2.19 der Streifen zwischen c_1 und c_2 konvex und somit die eindeutige Geodätische $x_1 \rightsquigarrow x_2$ in $X(c)$.

$\Rightarrow X(c)$ ist konvex und $CAT(0)$.

(2) Seien alle Geodätische in $X(c)$ so parametrisiert, dass $\pi(c'(0)) = c'(0)$ für $c(\mathbb{R}) \subset X(c)$.

hier sei $\pi := \text{proj}_{C(\mathbb{R})}$

Beh. Seien c', c'' parallel zu c . Dann gilt:

$$\text{proj}_{C(\mathbb{R})}(c''(t)) = c'(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Bew Beh: (mit \downarrow)

Aun die Aussage ist falsch.

Dann existiert $c \neq 0$ mit

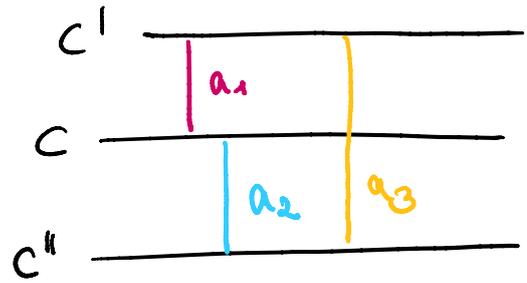
$$\text{proj}_{C(\mathbb{R})} c''(t) = c'(t+c)$$

$$\text{proj}_{C'(\mathbb{R})} C''(t) = C'(t+c)$$

$$\text{Sei } a_1 = d(C(0), C'(0)).$$

$$a_2 = d(C(0), C''(0))$$

$$a_3 = d(C'(0), C''(0))$$



Dann ist $a_1 + a_2 + a_3 =: a > 0$.

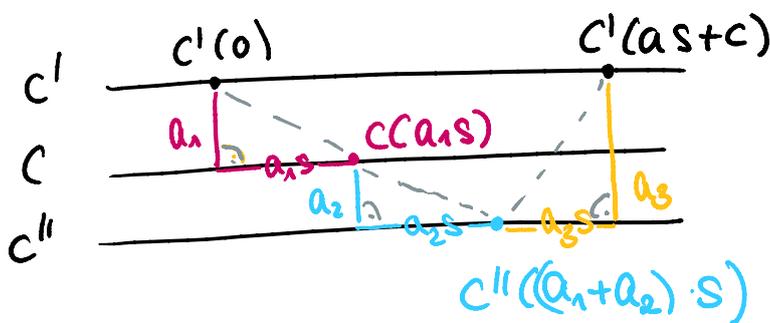
Weiter ist

$$d(C'(0), C'(as+c)) = |as+c| \quad \text{für ein } s > 0 \text{ bel.}$$

$$\leq d(C'(0), C(a_1 \cdot s))$$

$$+ d(C(a_1 \cdot s), C''((a_1+a_2) \cdot s))$$

$$+ d(C''((a_1+a_2) \cdot s), C'(a \cdot s+c)) = \textcircled{X}$$



$$\textcircled{X} \leq a_1 \cdot \sqrt{1+s^2} + a_2 \sqrt{1+s^2} + a_3 \sqrt{1+s^2}$$

mit 3x Pythagoras

$$= a \sqrt{1+s^2}$$

$$\Rightarrow (as+c)^2 \leq a^2 (1+s^2)$$

$$\Leftrightarrow 2asc + c^2 \leq a^2$$

weil $a > 0$
und $s > 0$
beliebig
größer

also folgt bel. \square

also folgt Beh. \square

01

- Mit der Beh. erhalten wir, dass $X(c)^P$ eine konvexe Teilmenge in $X(c)$ ist.
- Für ein $x \in X(c)$ existiert nun eine eind. Geodätische C_x durch x in $X(c)$.

Mit dem Satz vom flachen Streifen gilt

dann: $(x, t) \mapsto C_x(t)$ ist Isometrie.

$$X(c)^P \times \mathbb{R} \longrightarrow X(c)$$

Das was zu zeigen.

\square

6.22 Korollar:

X CAT(0), $g \in \text{Is}(X)$ hyperbolisch mit $k = |g| > 0$.

Ist γ Achse von g so ist $X(\gamma) = \text{Fix}(g)$.

Für alle $x \in X(\gamma)$ gilt dann $d(x, g \cdot x) = k$.

Die Isometrie g wirkt so auf $X(\gamma)$, dass gilt:

für $\varphi(x) = (y, t)$

ist $\varphi(g \cdot x) = (y, t+k)$

für alle $x \in X(\gamma)$.

wobei φ
Isometrie

$$X(\gamma) \xrightarrow{\varphi} X(\gamma)^P \times \mathbb{R}$$

Ausblick: (ohne Beweis)

Satz vom flachen Torus (flat Torus thm)

A endl. erzeugt, torsionsfrei, abelsch

(d.h. $A \cong \mathbb{Z}^l$ für ein $l > 0$).

X vollst. CAT(0) Raum.

Sei eine Wirkung $A \curvearrowright X$ gegeben, für die gilt:

• $A \curvearrowright X$ eigentlich, d.h.

$\forall p \in X \exists r > 0$ s.d.

$|\{g \in A \mid B_r(p) \cap B_r(g \cdot p) \neq \emptyset\}| < \infty$.

• $A \curvearrowright X$ halbeinfach.

Dann gilt: $\text{Fix}(A) \cong Y \times \mathbb{R}^l$

und A wirkt durch $a \cdot (v, w) = (v, \tau(a) + w)$

für $\tau: A \rightarrow (\mathbb{R}^l, +)$.

Ist weiter $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ eine \mathbb{Z} -Basis für A

so ist $\tau(\alpha_i)$ eine \mathbb{R} -Basis für \mathbb{R}^l .

(Vergl. Bth II.7.1)