

Einführung in die Numerik

Die schriftlichen Lösungen zu den Aufgaben 3 und 5 sind zu Beginn der Vorlesung am 16.4.2013 abzugeben.

1. (Rekursion) Es sei $I_n := \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Man zeige, dass die folgende Rekursionsformel gilt:

$$I_0 = e - 1, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Man zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)I_n = e.$$

(c) Man berechne die Integrale I_n nach der Rekursionsvorschrift für $n = 1, \dots, 25$ und diskutiere die numerischen Ergebnisse.

2. (Stellenauslöschung) Formen Sie die folgenden Ausdrücke so um, dass ihre Auswertung möglichst ohne Auslöschung vorgenommen werden kann:

(a) $\frac{1}{2x+1} - \frac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$

(b) $\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ für $|x| \gg 1$

(c) $\sqrt{\frac{1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$ für $|x| \ll 1$

(d) $\cos(2x) - \cos x$ für $|x| \ll 1$.

3. (Ein warnendes Beispiel zur Stellenauslöschung) Es sei F_n die Fläche eines im Einheitskreis einbeschriebenen regulären 2^n -Ecks.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Rekursion gilt:

$$F_2 := 2, \quad F_{n+1} = \frac{2^n}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} F_n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Stellen Sie den relativen Fehler $\frac{|F_n - \pi|}{\pi}$ tabellarisch und graphisch für $n = 2, \dots, 30$ dar. Für die graphische Darstellung benutze man den Matlab-Befehl *semilogy*.

4. (Vektornormen) Für $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gelten die Ungleichungen:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2.$$

(b) $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

5. (Frobenius-Norm) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Als Frobenius-Norm von A definieren wir

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm auf dem Raum der $n \times n$ Matrizen.

(b) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ für alle $n \times n$ Matrizen.

(c) $\|\cdot\|_F$ ist eine zur Euklidischen Vektornorm verträgliche Matrizenorm, d.h. es gilt

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2 \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

(d) $\|\cdot\|_F$ ist keine natürliche Matrizenorm, d.h. es gibt keine Vektornorm $\|\cdot\|$, für die gilt $\|A\|_F = \text{sp}(A^T A)^{1/2}$, wobei $\text{sp}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$ die Spur der Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

(e) $\|A\|_F = \|QAQ^T\|_F$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, (d.h. $Q^T Q = I$).