Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska

19. April 2013

Einführung in die Numerik
Serie 2

Die schriftlichen Lösungen zu den Aufgaben 2 und 3 sind zu Beginn der Vorlesung am 30.4.2013 abzugeben.

1. (obere Schranke für den Spektralradius einer Matrix) Es seien $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine mit $\|\cdot\|$ verträgliche Matrixnorm, d.h. $\|Ax\| \leq \|A\|_* \|x\|$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$$\|A\|_* \geq \rho(A)$$
gilt, wobei $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist Eigenwert von } A\}$.

2. (Konditionszahl und gestörte Systeme) Gegeben seien die Matrizen
$$A = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 101 & 99 \\ -99 & 101 \end{bmatrix}.$$
   (a) Berechnen Sie die Konditionszahlen bezüglich der Maximum-Norm.
   (b) Für die Vektoren
$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta b = \begin{bmatrix} \delta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{b} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\delta \end{bmatrix}$$
   mit einer kleinen Zahl $\delta > 0$ lösen Sie die Gleichungssysteme
$$Ax = b, \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad A(x + \Delta\hat{x}) = b + \Delta\hat{b}.$$
   Vergleichen Sie die jeweiligen relativen Fehler $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ und $\|\Delta\hat{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ mit der allgemeinen Fehlerabschätzung aus dem Störungssatz.

3. (positiv definite Matrizen) Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Man zeige:
   (a) Es gilt $a_{jj} > 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$.
   (b) Es gilt $a_{jk}^2 < a_{jj}a_{kk}$ für $j, k = 1, \ldots, n$, $j \neq k$.
   (c) Der betragsmäßig größte Eintrag von A liegt auf der Hauptdiagonalen.

4. (Rechenaufwand) Gegeben sei das Gleichungssystem (GLS) $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie den Aufwand (Anzahl der Gleitkommaoperationen) zur Lösung des GLS, wenn die Cramersche Regel verwendet wird und die dabei auftretenden Determinanten aus der Produktsumme über Permutationen (Leibniz-Formel) berechnet werden. Bestimmen Sie die Rechenzeit zur Lösung eines GLS mit 100 Unbekannten für den Supercomputer Titan Cray XK7 System mit 560640 Prozessoren und 17,59 Petaflop/s (Platz 1 der Top 500, November 2012).
Hinweis: Benutze die aus der Stirlingschen Formel resultierende Abschätzung
$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp(-n)} \leq \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

5. (LR Zerlegung einer tridiagonalen Matrix) Gegeben sei die Tridiagonalmatrix
$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & & & \\ -a & a+1 & -1 & & \\ & -a & a+1 & -1 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & -a & a+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
mit $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$.
   (a) Konstruieren Sie die LR-Zerlegung der Matrix A.
   (b) Berechnen Sie L^{-1}
   (c) Berechnen Sie für $a = 1$ mit 5b die Inverse A^{-1}.

6. (schlecht konditionierte Matrix) Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
die mit folgendem MATLAB-Ausdruck erzeugt werden kann:

A=-tril(ones(n),-1)+eye(n,n)+[ones(n-1,1);0]*[zeros(1,n-1),1];

   (a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit dem MATLAB-Befehl **[L,R]=lu(A)** für verschiedene n. Geben Sie einen Ausdruck für L und R für beliebiges n durch Verallgemeinerung der MATLAB-Ergebnisses.
   (b) Zeigen Sie, dass die Konditionszahlen bzgl. der 1-Norm von L und R exponentiell wachsen.