

Einführung in die Numerik Serie 3

Die schriftlichen Lösungen zu den Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 7.5.2013 abzugeben.

1. (Permutationsmatrizen) Es sei $P_{kl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k \neq l$, jene Matrix, die durch Vertauschung der k -ten und l -ten Spalte aus der Einheitsmatrix hervorgeht.

(a) Zeigen Sie

- i. $P_{kl}^T = P_{kl}^{-1}$ (Orthogonalität)
- ii. $P_{kl} = I + (e_k - e_l)(e_l - e_k)^T$, wobei e_k den k -ten Einheitsvektor bezeichnet.
- iii. Welche Auswirkungen haben die Operationen $P_{kl}A$ und AP_{kl} für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & \cdots & u_{m-1} \\ v_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v_{m-1} & & & 1 \end{bmatrix} :$$

Permutieren Sie Zeilen und Spalten von A geeignet, so dass die Faktoren der LR -Zerlegung mit $\mathcal{O}(m)$ Speicherplatz auskommen. Geben Sie L und R explizit an.

2. (LR -Zerlegung) Gegeben sei die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 6 & a^2 & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

mit einem reellen Parameter a . Bestimmen Sie die zugehörige LR -Zerlegung bzw. geben Sie an, für welche Werte von a diese nicht existiert.

3. (Rechenaufwand des Gaußschen Algorithmus) Bestimmen Sie die genaue Anzahl der Rechenoperationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen), die für den Gaußschen Algorithmus ohne Pivotisierung zum Lösen eines regulären linearen Gleichungssystems $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, erforderlich sind.

4. (Programmieraufgabe zur Determinanten-Berechnung nach Laplace) Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Determinante von A definiert als die Zahl $\det(A)$, für die rekursiv gilt

- $n = 1 \Rightarrow \det(A) := a_{11}$,
- $n > 1 \Rightarrow \det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{(i,j)})$,

wobei $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig ist und $A^{(i,j)}$ diejenige $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von A bezeichnet, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von A entsteht.

- (a) Programmieren Sie einen auf dieser Definition beruhenden Algorithmus zur Berechnung von $\det(A)$.
- (b) Wie hoch ist der Rechenaufwand?
5. (Eigenschaften der Konditionszahlen) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne die Identitätsmatrix.

- (a) Zeigen Sie, dass für die Konditionszahlen $\kappa(A) := \text{cond}(A)$ folgende Beziehungen gelten:
- i. $\kappa(A) \geq \kappa(I) = 1$ für alle natürlichen Matrixnormen,
 - ii. $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ für alle submultiplikativen Matrixnormen,
 - iii. $\kappa(cA) = \kappa(A)$ für alle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
 - iv. $\kappa_2(Q) = 1$ für eine orthogonale Matrix Q ,
 - v. $\kappa_2(A) \leq \kappa_F(A) \leq n^2 \kappa_\infty(A)$,
 - vi. $\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$, falls Q eine orthogonale Matrix ist.
- (b) Eine Matrix, bei der die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, nennt man zeilenäquibriert. Durch Multiplikation mit einer regulären Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann jede reguläre Matrix A in eine zeilenäquibrierte Matrix DA transformiert werden. Zeigen Sie, dass die Äquibrierung die Kondition nur verbessern kann, d.h. es gilt

$$\kappa_\infty(DA) \leq \kappa_\infty(A).$$