

Einführung in die Numerik Serie 4

Die schriftlichen Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 14.05.2013 abzugeben.

Aufgabe 1 (Newton-Interpolation)

- (a) Die folgende Tabelle soll Werte eines Polynoms p vom Höchstgrad 2 zeigen. Leider ist ein Funktionswert falsch. Finden und korrigieren Sie ihn, indem Sie untersuchen, wie sich der Fehler im Schema der dividierten Differenzen fortpflanzt.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2	-1	1	3	5	7
$p(x_i)$	13	8	3	1	7	21	43

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der dividierten Differenzen den Grad des Polynoms, das die folgenden Daten interpoliert.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1	0	9	34	81	156	265

- (c) Ermitteln Sie mit Hilfe des Neville-Schemas den Funktionswert des Polynoms aus (b) an der Stelle $x = 1.5$.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe, Abgabe von Quelltext und Ergebnisausdruck)

In dieser Aufgabe soll die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

mittels dividierter Differenzen interpoliert werden.

- (a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die als Eingabeparameter Interpolationsknoten x_0, x_1, \dots, x_n und zugehörige Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ bekommt und die dividierten Differenzen $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$ ausgibt.
- (b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die als Eingabeparameter einen Vektor, der die dividierten Differenzen enthält, einen Vektor mit den Interpolationsknoten und einen Vektor mit den Auswertungspunkten fordert. Die Funktion soll dann das Newton-Interpolationspolynom an allen Auswertungspunkten auswerten und die Funktionswerte des Polynoms an den Auswertungspunkten zurückliefern.
- (c) Für $n = 4, 6, 9$ soll das Interpolationspolynom von $f(x)$ zu n äquidistanten Stützstellen $x_i \in [-1, 1]$ berechnet werden. Plotten Sie alle drei Interpolationspolynome sowie die Funktion f in eine Grafik.
Für $n = 6, 10, 20$ soll das Interpolationspolynom von $f(x)$ zu n Tschebyscheff-Knoten berechnet werden. Plotten Sie auch hier alle drei Interpolationspolynome sowie die Funktion f in eine Grafik.
- (d) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 (Ausgleichsrechnung)

Für die nachfolgenden Sauerstoff-Stickstoff-Verbindungen sind die Molekulargewichte festgestellt worden. Bestimmen Sie mittels Methode der kleinsten Quadrate (*Gaußsche* Ausgleichsrechnung) daraus die Atomgewichte von Stickstoff und Sauerstoff mit vier Dezimalstellen.

Verbindung	NO	N_2O	NO_2	N_2O_3	N_2O_5	N_2O_4
Molekulargewicht	30.006	44.013	46.006	76.012	108.010	92.011

Aufgabe 4 (Lagrange-Interpolation)

Gegeben seien die Stützknotten x_0, x_1, x_2 .

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Basis-Polynome $L_0^{(2)}(x), L_1^{(2)}(x), L_2^{(2)}(x)$ zu den Knoten auf.
- (b) Es wird die Funktion $g(x)$ auf folgende Weise definiert:

$$g(x) = L_0^{(2)}(x) + L_1^{(2)}(x) + L_2^{(2)}(x) - 1.$$

Zeigen Sie, dass $g(x) \equiv 0$.

- (c) Zeigen Sie allgemein, dass für die Basispolynome zu den Knoten x_0, x_1, \dots, x_n die Lagrangeschen Basispolynome eine Zerlegung der eins bilden, d. h., dass gilt

$$g(x) = \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(x) - 1 = 0$$

Aufgabe 5 (Dividierte Differenzen)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der dividierten Differenzen:

- (a) Die dividierten Differenzen sind symmetrische Funktionen der x_i , d. h. ist $x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ eine beliebige Permutation von x_0, x_1, \dots, x_k , so gilt

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}].$$

- (b) Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grad n und sind $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots$) Stützstellen, so gilt $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$ für $k > n$.

Aufgabe 6 (Interpolationsfehler)

Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \log(x + 1)$. Zu einer beliebig vorgegeben Folge von Stützstellenvektoren

$$\left(x_i^{(n)}\right)_{0 \leq i \leq n} \subset [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}$$

sei p_n das zugehörige Interpolationspolynom aus P_n .

Zeigen Sie, dass die Folge der p_n auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.