Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska, V. Gruhne

13. Mai 2013

Einführung in die Numerik
Serie 5

Die schriftlichen Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 21.05.2013 abzugeben.

Aufgabe 1 (Hermite-Basispolynome)
Gegeben seien paarweise verschiedene Knoten x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, der jeweilige Funktionswert und die Ableitungswerte $y_i^{(k)}$ bis zur Ordnung $k = m_i$ im Knoten x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Es sei

$$l_{ij} := \frac{(x-x_i)^j}{j!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right)^{m_k+1}, \quad i = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \ldots, m_i.$$

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierten Hermite-Basispolynome L_{ij}

$$\begin{aligned} L_{im_i}(x) &= l_{im_i}(x), && i = 0, \ldots, n \\ L_{ij}(x) &= l_{ij}(x) - \sum_{k=j+1}^{m_i} l_{ij}^{(k)}(x_i) L_{ik}(x), && j = m_i - 1, m_i - 2, \ldots, 0 \end{aligned}$$

die Beziehungen

$$L_{ij}^{(r)}(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \text{ und } j = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad 0 \le k \le n, \quad 0 \le r \le m_k$$

erfüllen.

Aufgabe 2 (Hermite-Interpolation)

(a) Für die Funktion $f \in C^n(\mathbb{R})$ sei $p(x)$ das durch die Bedingungen $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ bestimmte Hermite-Interpolationspolynom. Zeigen Sie, dass das gesuchte Interpolationspolynom durch das Taylor-Polynom

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen Sie das Hermite-Polynom, das mit der Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ im Funktionswert und den ersten vier Ableitungswerten an der Stelle $x_0 = 0$ übereinstimmt.

Aufgabe 3 (Newton-Interpolation)

Gegeben seien die Logarithmuswerte $\ln(100), \ln(101), \ln(102), \ln(103)$. Mit welcher Genauigkeit kann der Wert $\ln(100.5)$ mit dem Newton-Interpolationspolynom berechnet werden?

Aufgabe 4 (Hermite-Interpolation)

Welches Polynom erfüllt $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p''(1) = 4$, $p(0) = 5$ und $p'(0) = 6$?

(a) Ermitteln Sie dazu die Hermite-Basispolynome und lösen Sie das Hermite-Interpolationsproblem mit deren Hilfe.

(b) Berechnen Sie das gesuchte Polynom in der Newton-Darstellung unter Zuhilfenahme der dividierten Differenzen.

Aufgabe 5 (Birkhoff-Interpolation)

Schreibt man bei der Hermite-Interpolationsaufgabe nicht alle Ableitungswerte vor, so spricht man von Birkhoff-Interpolation. Diese Interpolationsaufgabe ist im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar.

(a) Zeigen Sie, dass es kein Polynom $p(x)$ höchstens fünften Grades gibt, das $p(-1) = 1$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p''(-1) = 0$, $p''(0) = 0$ und $p''(1) = 0$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie alle Polynome $p(x)$ höchstens fünften Grades mit $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p''(-1) = 0$, $p''(0) = 0$ und $p''(1) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 6 (Interpolationsfehler)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2 + 2\cos x$. Mit den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi$ soll $f(x)$ durch ein Hermite-Interpolationspolynom im Intervall $[0, \pi]$ interpoliert werden.

(a) Ermitteln Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ für $m_0 = 2$ und $m_1 = 0$. Welchen Grades ist das zu erwartende Polynom?

(b) Geben Sie mit Hilfe des Theorems 3.3.3 eine Abschätzung des Fehlers $e(x) = |f(x) - p(x)|$ im Intervall $[0, \pi]$ an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem tatsächlichen maximalen Fehler.