

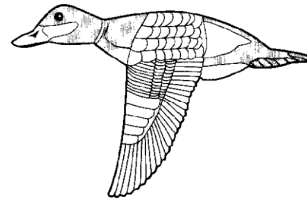
## Einführung in die Numerik Serie 6

Die schriftlichen Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 28.05.2013 abzugeben.

### Aufgabe 1 (Programmieraufgabe)

(Senden Sie das MATLAB-File und die Datei zur Erzeugung der Plots an [volker.gruhne@ovgu.de](mailto:volker.gruhne@ovgu.de))

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Ente während des Fluges. Um das obere Profil der Ente zu approximieren, werden  $n + 1 = 21$  Punkte entlang der Kurve ausgewählt, durch die eine approximierende Kurve verlaufen soll. Die Koordinaten der Punkte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.



x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0
f(x)	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25
x	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3	
f(x)	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25	

- Interpolieren Sie die Daten mit MATLAB. Erstellen Sie eine Grafik des Lagrange-Polynoms, das Sie an 125 Stellen im Abstand 0.1 zwischen 0.9 und 13.3 auswerten. Welchen Grades ist das Interpolationspolynom?
- Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die zu vorgegebenen Daten  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ , den natürlichen kubischen Spline berechnet und dessen Auswertung an gewissen Stellen  $x_0$  ermöglicht.
- Zeichnen Sie den kubischen Spline, der das Entenprofil interpoliert, in die Grafik aus Teil (a), indem Sie mit dem Programm aus Teil (b) den Interpolanten ebenfalls an 125 Stellen im Abstand 0.1 zwischen 0.9 und 13.3 auswerten.
- Beschreiben Sie das Verhalten beider Interpolanten und finden Sie eine Erklärung für das unterschiedliche Verhalten.

**Aufgabe 2** (Kubische Splines)

Bestimmen Sie  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion  $s(x) : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$s(x) = \begin{cases} (x+1)^4 + \alpha(x-1)^4 + 1 & x \in [-1, 0] \\ -x^3 - 8\alpha x + \gamma & x \in (0, 1] \\ \beta x^3 + \delta x^2 + 14x - 1 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

ein kubischer Spline bezüglich der Stützstellen  $x_i = i - 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , ist. Handelt es sich um einen natürlichen kubischen Spline?

**Aufgabe 3** (Lineare Splines)

Es seien eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und Stützwerte  $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  gegeben. Weiterhin bezeichne  $s$  die zugehörige interpolierende lineare Splinefunktion. Zeigen Sie, dass für jede stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion  $f$  mit  $f(x_j) = f_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , gilt:

$$\int_a^b |f'(x) - s'(x)|^2 dx = \int_a^b |f'(x)|^2 dx - \int_a^b |s'(x)|^2 dx$$

**Aufgabe 4** (Kubische Splines)

Gegeben sei das Gitter  $x_0 < x_1 < x_2$  mit  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$ . Ferner sei  $f(x) = |x|$  für alle  $x \in [-1, 1]$ . Interpolieren Sie  $f$  auf dem gegebenen Gitter durch

- (a) einen natürlichen kubischen Spline
- (b) einen gebundenen kubischen Spline.

**Aufgabe 5** (Fehlerabschätzung für kubische Splines)

Gegeben sei eine äquidistante Zerlegung  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  des Intervalls  $[0, 1]$  mit  $x_j = x_{j-1} + h$  für  $j = 1, 2, \dots, n$  und  $h = 1/n$ . Betrachten Sie auf diesem Intervall die Funktion  $f(x) = \sin(2\pi x)$  und die dazugehörige interpolierende gebundene kubische Splinefunktion  $s$ . Wie groß muss die Zahl  $n$  gewählt werden, damit auf dem gesamten Intervall die Differenz zwischen  $s$  und  $f$  dem Betrage nach kleiner als  $10^{-12}$  ausfällt?

**Aufgabe 6** (Natürliche kubische Splines)

Weisen Sie nach, dass natürliche kubische Splines quadratische Funktionen in Allgemeinen nicht reproduzieren können.