

Einführung in die Numerik Serie 7

Die Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 04.06.2013 abzugeben.

Aufgabe 1 (Korrigierte Trapezregel)

Es sei $p(x)$ das kubische Hermite-Polynom von $f(x)$ mit den Stützstellen $x_0 = a$ und $x_1 = b$ und den Daten $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, $k = 0, 1$.

- (a) Zeigen Sie, dass man damit die korrigierte Trapezregel

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_a^b p(x) \, dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a))$$

erhält.

- (b) Bestimmen Sie den Genauigkeitsgrad der Quadraturformel.
(c) Zeigen Sie, dass

$$\ln 2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+3} \, dx$$

gilt und berechnen Sie einerseits mit Hilfe der Trapezregel, andererseits unter Verwendung der verbesserten Trapezregel einen Näherungswert für $\ln 2$. Vergleichen Sie die Fehler.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe)

(Senden Sie Ihre **kommentierten** MATLAB-Files an volker.gruhne@ovgu.de)

Aus der Sicht des Nutzers muss ein Quadraturverfahren die Aufgabe lösen, zu vorgegebener Integrationsgenauigkeit tol einen Näherungswert I^* für den Integralwert I zu finden, so dass $|I^* - I| < tol$ gilt. Dazu muss das Intervall $[a, b]$ durch das Verfahren selbst, also weitestgehend automatisch, unterteilt werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht wird. Die automatische Anpassung der Gitterpunkte führt auf ein adaptives Verfahren.

Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad (1)$$

ist das folgende adaptive Quadraturverfahren in MATLAB zu implementieren:

```

function [I,xi]=adaptiv_int(f,a,b)
% adaptives Quadraturverfahren zum Loesen
% des Integrals der Funktion f im Intervall [a,b]
% Ausgabewerte: I ... Approximation des Integrals
%                xi ... adaptives Gitter

tol=1.0e-5;
if(err>tol*intabs)
    [int1,xi1]=adaptiv_int(f,a,(a+b)/2);
    [int2,xi2]=adaptiv_int(f,(a+b)/2,b);
    I=int1+int2;
    xi = [xi1,xi2(2:end)];
else
    I=I2;
    xi=[a,b];
end

```

Dabei bezeichnen

$err=diff^{(5/3)}$;

$diff=|I2-I1|$;

$I1$ eine Approximation des Integrals (1) mit Hilfe der Trapezregel

$I2$ eine Approximation des Integrals (1) mit Hilfe der Simpsonregel

$intabs$ eine Approximation des Integrals (1) mit Hilfe der Simpsonregel,

wobei der Integrand in (1) durch $|f(x)|$ ersetzt wird

(a) Implementieren Sie in MATLAB die (einfache) Trapezregel (Funktion `trapez(f,a,b)`) und (einfache) Simpsonregel (Funktion `simpson(f,a,b)`) zur numerischen Integration der Funktion f im Intervall $[a,b]$.

(b) Vervollständigen Sie das adaptive Quadraturverfahren. Testen Sie das Programm mit

(i) $a = -2, b = 2, f(x) = (0.01 + x^2)^{-1}$ (ii) $a = 0, b = 4, f(x) = x(1 + 10e^{-x^2})$.

Geben Sie in beiden Fällen den Fehler

$$\frac{\left| I - \int_a^b f(x) dx \right|}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}$$

aus.

(c) Welche Zerlegung hat die Funktion jeweils gefunden? Plotten Sie $(x_i, f(x_i))$.

Aufgabe 3 (Trapezregel)

Berechnen Sie näherungsweise das Integral

$$\int_0^2 x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 5 dx$$

mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel mit $m = 4$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem exakten Wert.

Aufgabe 4 (Simpson-Formel)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^4 \sqrt{x^3 + x + 1} \, dx$$

mit Hilfe der zusammengesetzten Simpson-Formel. Wählen Sie dazu $m = 4$. Geben Sie eine Fehlerschätzung an.

Aufgabe 5 (Quadraturfehler)

Das Integral

$$I = \int_1^2 x \ln x \, dx$$

soll numerisch bis auf eine Genauigkeit von mindestens 10^{-4} approximiert werden.

- (a) Wie groß muß die Anzahl m der Teilintervalle sein, damit mit der zusammengesetzten Trapezregel diese Genauigkeit erreicht wird?
- (b) Wie groß muß m bei der zusammengesetzten Simpson-Formel sein, um diese Genauigkeit zu erreichen?
- (c) Überprüfen Sie für die zusammengesetzte Simpson-Formel und dem von Ihnen ermittelten Wert m , ob der Näherungswert um höchstens 10^{-4} vom exakten Wert $I = 2 \ln 2 - 0.75$ abweicht.