

## Einführung in die Numerik Serie 8

Die Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 11.06.2013 abzugeben.

### Aufgabe 1 (Programmieraufgabe)

(Senden Sie Ihr **kommentiertes** MATLAB-File an *volker.gruhne@ovgu.de*)

Das Ziel besteht darin, die Integrale

$$(i) \int_0^2 e^{-x^2} dx = 0.8820813907624215 \dots$$

$$(ii) \int_0^2 \tanh(x) dx = 1.3250027473578645 \dots$$

$$(iii) \int_0^2 |x - \sqrt{2}| dx = 1.17157287525381 \dots$$

zu approximieren.

- (a) Implementieren Sie die Funktion `gauss_legendre(fx,a,b)` in MATLAB, die eine gegebene Funktion `fx` innerhalb eines Intervalls `[a,b]` mit  $n = 3$  Stützstellen approximiert. Achten Sie darauf, dass der Integrationsbereich im Fall  $a \neq -1$  oder  $b \neq 1$  transformiert werden muss.
- (b) Berechnen Sie für obige Integrale sowohl mit Hilfe der Funktion `gauss_legendre` als auch mit Hilfe der Trapez- und der Simpsonregel Näherungswerte. Verwenden Sie dabei die sogenannten summierten Quadraturformeln, d. h., Sie teilen den Integrationsbereich in  $m$  gleiche Teilintervalle und wenden das jeweilige Verfahren auf jedes Teilintervall an. Geben Sie die Differenz zwischen dem numerischen Wert für  $m = 1, 10, 100, 1000$  und dem exakten Wert aus.
- (c) Wie verringert sich jeweils in etwa der Fehler bei Verzehnfachung von  $m$  bei Verwendung der unterschiedlichen Quadraturverfahren? Woran kann es liegen, dass bei (ii) die Fehler größer sind als bei (i)? Warum verhalten sich die Quadraturverfahren bei (iii) ähnlich?

### Aufgabe 2 (Quadraturformeln)

- (a) Zeigen sie, dass die Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{3}{8}f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{27}{56}f\left(\frac{11}{18}\right) + \frac{1}{7}f(1)$$

den Genauigkeitsgrad zwei besitzt.

- (b) Bestimmen Sie die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  so, dass die Quadraturformel

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx c \{ f(ah) + f(bh) \}$$

einen möglichst hohen Genauigkeitsgrad besitzt.

**Aufgabe 3** (Gauß-Legendre-Quadratur)

Approximieren Sie die folgenden Integrale mit der Gauß-Legendre-Quadratur mit  $n = 2$  und  $n = 3$  Knoten und vergleichen Sie die Näherungen mit dem exakten Wert des Integrals.

$$(a) \int_{-1}^1 e^{\sin(2x)} \cos(2x) dx \quad (b) \int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$$

**Aufgabe 4** (Gauß-Laguerre-Quadratur)

Es wird das Intervall  $[0, \infty)$  betrachtet. Es soll eine Quadraturformel der Form

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(\lambda_i)$$

gefunden werden, die bei  $n + 1$  Stützstellen für Polynome vom Grad  $2n + 1$  exakt ist.

- (a) Bestimmen Sie für  $n = 1$  sowohl die Gewichte  $\alpha_i$  als auch die Stützstellen  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1$ ) des Quadraturverfahrens. Zur Ermittlung der zum Gewicht  $\omega(x) = e^{-x}$  orthogonalen Polynome verwenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.
- (b) Bestätigen Sie, dass der Exaktheitsgrad der Quadraturformel drei ist.
- (c) Die Gammafunktion ist gegeben durch  $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ . Welche Werte können Sie exakt mit der Quadraturformel berechnen? Approximieren Sie den Wert  $\Gamma(3.5)$ .