

## Einführung in die Numerik Serie 10

Die Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 25.06.2013 abzugeben.

### Aufgabe 1 (Programmieraufgabe)

(Senden Sie Ihre **kommentierten** MATLAB-Programme an *volker.gruhne@ovgu.de* und geben Sie Ihre Ergebnisprotokolle ab.)

- Implementieren Sie in MATLAB das Intervallschachtelungsverfahren (`[xstern,anzit]=intervallschachtelung(f,a,b,tol,maxit)`) und das Sekantenverfahren (`[xstern,anzit]=sekanten(f,a,b,tol,maxit)`) zur numerischen Approximation von Nullstellen. Dabei sollen die zu untersuchende Funktion `f`, das Intervall `[a, b]` sowie die geforderte Genauigkeit `tol` und eine maximale Anzahl an Iterationen `maxit` übergeben und die Näherungslösung `xstern` und die benötigte Iterationenzahl `anzit` ausgegeben werden. Das Programm soll abbrechen, falls die maximale Iterationenzahl erreicht wird oder  $|x_{n+1} - x_n| \leq \text{tol}$  gilt.  
Testen Sie Ihre Programme, indem Sie die in  $[2, 3]$  gelegene Nullstelle von  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 15x - 7$  berechnen.
- Bestimmen Sie mit Hilfe des Intervallschachtelungsverfahrens die Nullstelle der Funktion  $g(x) = xe^{-x^2}$  auf zehn gültige Dezimalstellen genau. Verwenden Sie als Startintervall einmal  $I_1 = [-0.75, 1.5]$  und einmal  $I_2 = [-0.75, 1.0]$ . Wie viele Iterationen werden jeweils benötigt?
- Wiederholen Sie die Bestimmung der Nullstelle aus (b) mit dem Sekantenverfahren. Welche Beobachtung machen Sie? Wie viele Iterationen werden hier benötigt?
- Wie lässt sich der Unterschied im Verhalten der beiden Verfahren erklären?

### Aufgabe 2 (Iterationsverfahren)

Es seien  $f(x)$  und  $G(t)$  mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen und es gelte  $G(0) = 1$  und  $G'(0) = 0.5$ . Ferner werde  $\Phi(x)$  in folgender Weise definiert:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} G\left(\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right).$$

- Bestätigen Sie, dass das durch  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) definierte Iterationsverfahren für einfache Nullstellen von  $f(x)$  lokal mit kubischer Konvergenzordnung konvergiert.
- Es sei  $G(t) = (1 - 0.5t)^{-1}$ . Zeigen Sie, dass  $G(t)$  (in einer Umgebung von  $t = 0$ ) die Voraussetzungen erfüllt und dass das in (a) definierte Verfahren zur Bestimmung einer Lösung von  $f(x) = 0$  im Fall  $f'(x) > 0$  einem Newton-Verfahren angewendet auf die Funktion  $F(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$  entspricht.

**Aufgabe 3** (Newton-Verfahren)

Schließen Sie die reellen Nullstellen von  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$  in Intervalle der Länge eins ein und berechnen Sie näherungsweise eine Nullstelle mit Hilfe dreier Schritte des Newton-Verfahrens.

**Aufgabe 4** (Variante des Newton-Verfahrens)

Die Funktion  $f \in C^{p+1}(\mathbb{R})$  habe in  $x^*$  eine  $p$ -fache Nullstelle ( $p \in \mathbb{N}$ ). Wir betrachten folgende Variante des Newton-Verfahrens:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - p \cdot \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Variante des Newton-Verfahrens lokal mit quadratischer Ordnung konvergiert.
- (b) Zeigen Sie, dass das gewöhnliche Newton-Verfahren für  $f$  bei  $x^*$  nur lineare Konvergenz besitzt.
- (c) Weisen Sie nach, dass die Variante des Newton-Verfahrens mit dem gewöhnlichen Newton-Verfahren angewandt auf die Funktion  $f^{1/p}$  übereinstimmt.

**Aufgabe 5** (Nichtlineare Gleichungssysteme)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem im  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} uv + u - v - 1 &= 0 \\ uv &= 0 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die exakten Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems.
- (b) Führen Sie für die Startwerte

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils den ersten Iterationsschritt des Newton-Verfahrens durch.