

## Einführung in die Numerik Serie 11

### Aufgabe 1 (Einzel- und Gesamtschrittverfahren)

- (a) Zeigen Sie, dass  $\lambda = 0$  stets ein Eigenwert der Iterationsmatrix des Einzelschrittverfahrens ist.
- (b) Untersuchen Sie die Konvergenz des Einzel- und des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix} x = b$$

in Abhängigkeit vom Parameter  $t \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 2 (Einzel- und Gesamtschrittverfahren)

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem ausgehend von  $x^{(0)} = (1, 2)^T$  durch Ausführung zweier Schritte des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens. Welches Verfahren ist zu bevorzugen?

$$\begin{pmatrix} 10 & 0.4 \\ 0.4 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 3 (Abstiegsverfahren)

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrisch, positiv definite Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^*$  Lösung von  $Ax = b$  und

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*)$$

gilt.

- (b) Führen Sie handschriftlich zwei Schritte des Gradientenverfahrens aus. Fertigen Sie eine (lesbare) Skizze an, die einige Höhenlinien  $\{x : \Phi(x) = \text{const}\}$  von  $\Phi(x)$  und den Verlauf der Iterationsschritte  $x^0$ ,  $x^1$  und  $x^2$  für die Fälle

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zeigt.

(c) Für den Approximationsfehler beim Gradientenverfahren gilt die Abschätzung

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_A \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot \|x^{(k)} - x^*\|_A \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Berechnen Sie für die Fälle (i) und (ii) die Konditionszahl  $\kappa$  der Matrix  $A$  zur Spektralnorm und interpretieren Sie die Abschätzung des Approximationsfehlers in Bezug auf die Konvergenz.