

# Eine Zerlegungsmethode bzgl. Paaren zueinander dualer Kegel und Anwendung in Sobolevräumen höherer Ordnung

TOBIAS BRÄU \*, MA 99

6. Februar 2006

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Studienarbeit soll die von J.J Moreau bewiesene orthogonale Zerlegung in Hilberträumen bezüglich Paaren zueinander dualer Kegel in Bezug auf Sobolevräume höherer Ordnung untersucht werden. Weiterhin werden einige explizite Beispiele gegeben, aus welchen durch Anschauung der Zusammenhang zum Hindernisproblem erkennbar wird.

---

\*tobias.braeu@student.uni-magdeburg.de

# 1 Abstrakte Zerlegungsmethode

Wir werden zuerst ein paar grundlegende Resultate der Funktionalanalysis wiederholen (siehe dazu auch [1]), welche das Verständnis der Zerlegung von Moreau erleichtern werden. Bezeichne im folgenden  $\mathcal{H}$  einen reellen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ . Des Weiteren seien Begriffe wie konvex und abgeschlossen definiert wie gewohnt.

**Satz 1** (Projektionssatz)

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $\mathcal{K}$  eine nichtleere abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $\mathcal{H}$ . Dann existiert zu jedem  $x \in \mathcal{H}$  genau ein  $y \in \mathcal{K}$  mit

$$\|x - y\| = \inf_{z \in \mathcal{K}} \|x - z\|. \quad (1)$$

Eine äquivalente Charakterisierung von  $y$  ist:

$$\langle x - y, z - y \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}. \quad (2)$$

BEWEIS: Zeigen wir zunächst die Existenz eines solchen  $y$ :

Sei  $x \in \mathcal{H}$  beliebig aber fest gegeben und sei  $d := \inf_{z \in \mathcal{K}} \|x - z\|$ .

Dann existiert eine Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ :

$$\|x - z_k\| \searrow d, \quad k \rightarrow \infty \quad (3)$$

Da wir im Hilbertraum arbeiten und somit die Parallelogrammgleichung

$$\|(x - z_k) - (x - z_l)\|^2 + \|(x - z_k) + (x - z_l)\|^2 = 2(\|x - z_k\|^2 + \|x - z_l\|^2)$$

gilt, folgt

$$\|z_k - z_l\|^2 = 2(\|x - z_k\|^2 + \|x - z_l\|^2) - 4\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\|^2$$

Auf Grund der Konvexität von  $\mathcal{K}$  ist auch  $\frac{z_k + z_l}{2} \in \mathcal{K}$  und folglich gilt  $\|x - \frac{z_k + z_l}{2}\| \geq d$ . Dies und (3) liefert

$$\|z_k - z_l\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 + o(1) \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge. Wenn wir noch beachten, dass  $\mathcal{H}$  vollständig und  $\mathcal{K}$  abgeschlossen ist, haben wir  $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$  mit  $y \in \mathcal{K}$ . Dass unser gefundenes  $y$  Gleichung (1) erfüllt, folgt aus:

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - z_k\| = \|x - \lim_{k \rightarrow \infty} z_k\| = \|x - y\|$$

Womit wir die Existenz bewiesen hätten.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit nachzuweisen. Erfülle  $y_1$  ebenfalls (1). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|y - y_1\|^2 &= \|(x - y_1) - (x - y)\|^2 \\
&= 2(\underbrace{\|x - y\|^2}_{=d} + \underbrace{\|x - y_1\|^2}_{=d}) - 4\| \underbrace{x - \frac{y - y_1}{2}}_{\in \mathcal{K}} \|^2 \\
&\leq 4d^2 - 4d^2 = 0.
\end{aligned}$$

Also  $\|y - y_1\| = 0$  und somit  $y = y_1$ .

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch die Charakterisierung (2) von  $y$  prüfen. Genüge  $y$  zunächst der Gleichung (1).

Sei  $z \in \mathcal{K}$  und  $\alpha \in (0, 1)$  so, dass  $(1 - \alpha)y + \alpha z \in \mathcal{K}$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &\leq \|x - (1 - \alpha)y - \alpha z\|^2 = \|x - y - \alpha(z - y)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2\alpha \langle x - y, z - y \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha^2 \|z - y\|^2
\end{aligned}$$

und somit

$$2\langle x - y, z - y \rangle_{\mathcal{H}} \leq \alpha^2 \|z - y\|^2.$$

Mit  $\alpha \searrow 0$  folgt (2).

Nehmen wir umgekehrt (2) an, dann ist  $\forall z \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - y, y - z \rangle_{\mathcal{H}}}_{\geq 0} + \|y - z\|^2 \\
&\geq \|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

d.h.  $y$  minimiert den Abstand und somit gilt (1). □

**Bemerkung:** Das durch die obige Gleichung (1) spezifizierte  $y$ , wird als Projektion von  $x$  auf  $\mathcal{K}$  bezeichnet, wir schreiben dafür im Folgendem auch  $y = \text{proj}_{\mathcal{K}} x$ .

Nachdem wir dieses äußerst wichtige Resultat gezeigt haben, fehlen uns noch die geometrischen Objekte, mit welchen wir uns im Weiteren auseinandersetzen werden. Aus diesem Grunde:

**Definition 2** (Kegel und dualer Kegel)

(i) Eine Menge  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$  heißt Kegel, wenn für alle  $x \in \mathcal{K}$  und alle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  auch  $\alpha \cdot x \in \mathcal{K}$  gilt.

(ii) Sei  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$ . Die Menge  $\mathcal{K}^* := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in \mathcal{K} : \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0\}$  wird der zu  $\mathcal{K}$  duale Kegel genannt.

(iii) Seien  $\mathcal{C}, \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}$  zwei Kegel. Zwei Kegel  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{K}$  heißen zueinander dual, wenn sowohl  $\mathcal{K} = \mathcal{C}^*$  als auch  $\mathcal{C} = \mathcal{K}^*$  gilt.

**Satz 3** Sei  $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$  ein abgeschlossener, konvexer Kegel und  $x \in \mathcal{H}$  beliebig. Dann existieren  $y \in \mathcal{K}$  und  $z \in \mathcal{K}^*$  so, dass

$$x = y + z \quad \text{und} \quad \langle z, y \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

BEWEIS: Wir betrachten beliebiges  $x \in \mathcal{H}$ .

Des Weiteren sei  $y = \text{proj}_{\mathcal{K}} x$  und  $z = x - y$ . Wegen Gleichung (2) aus Satz 1, gilt  $\forall p \in \mathcal{K}$

$$\langle x - y, p - y \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0. \quad (4)$$

Mit  $p = \lambda y$ ,  $\lambda \geq 0$ , folgt

$$(\lambda - 1) \langle z, y \rangle_{\mathcal{K}} \leq 0.$$

Da  $\lambda \geq 0$  beliebig war, muss  $\langle z, y \rangle_{\mathcal{H}} = 0$  gelten. Dieses kombiniert mit (4) liefert

$$\langle z, p \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall p \in \mathcal{K}.$$

Also  $z \in \mathcal{K}^*$ . □

Dieses Resultat liefert uns:

**Folgerung 4** Sei  $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$  ein abgeschlossener, konvexer Kegel.

Dann gilt

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^{**}.$$

BEWEIS: Das  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^{**}$  folgt sofort.

Sei  $x \in \mathcal{K}^{**}$ . Dann existiert nach Satz 3  $y \in \mathcal{K}$ ,  $z \in \mathcal{K}^*$  mit  $x = y + z$  und  $\langle y, z \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ .

Damit erhalten wir

$$0 \geq \langle x, z \rangle_{\mathcal{H}} = \langle y, z \rangle_{\mathcal{H}} + \langle z, z \rangle_{\mathcal{H}} = \|z\|^2,$$

d.h.  $\|z\|^2 = 0$  und somit  $z = 0$ . Dies liefert  $x = y$ , also  $\mathcal{K}^{**} \subset \mathcal{K}$ . □

Da nun alle Vorarbeiten geleistet sind, können wir zum eigentlichen Thema dieser Arbeit kommen, der von J.J.Moreau[2] bewiesenen *orthogonalen Zerlegung bezüglich zueinander dualer Kegel*.

**Folgerung 5** (Moreau)

Seien  $x, y, z \in \mathcal{H}$ . Weiter seien  $\mathcal{K}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$  konvexe, abgeschlossene, zueinander duale Kegel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $z = x + y$ , mit  $x \in \mathcal{K}$ ,  $y \in \mathcal{C}$  und  $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} = 0$
- (ii)  $x = \text{proj}_{\mathcal{K}} z$       $y = \text{proj}_{\mathcal{C}} z$

BEWEIS: Seien  $x, y, z \in \mathcal{H}$  und erfüllen (i). Da für  $y \in \mathcal{C}$  und  $\forall p \in \mathcal{K}$

$$\langle z - x, p - x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle y, p - x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle y, p \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad \text{gilt,}$$

ist das Charakteristikum (2) aus Satz 1 erfüllt und damit  $x = \text{proj}_{\mathcal{K}} z$ . Betrachte  $x \in \mathcal{K}$  und sei  $q \in \mathcal{C}$ . Dann folgt ähnlich wie oben:

$$\langle z - y, q - y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, q - y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, q \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0,$$

also  $y = \text{proj}_{\mathcal{C}} z$ . Beides zusammen liefert (ii).

Der Beweis der Rückrichtung, entspricht dem von Satz 3. □

**Bemerkung:** Sei  $\mathfrak{M}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{H}$ . Da  $\mathfrak{M}$  bzgl. der Multiplikation abgeschlossen ist, also die Kegeleigenschaft aus Definition 2 besitzt, handelt es sich bei obigem Satz um eine Verallgemeinerung der üblichen *orthogonalen Zerlegung* bzgl.  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}^{\perp}$ .

## 2 Eigenschaften

In dem folgenden Abschnitt soll es darum gehen einige wichtige Eigenschaften der Moreau Zerlegung allgemein und dann auch in Sobolevräumen als speziellen Hilberträumen festzuhalten.

### Satz 6 (Lipschitz Stetigkeit)

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$  ein abgeschlossener konvexer Kegel und  $\mathcal{K}^*$  der dazugehörige duale Kegel. Weiter seien  $u, v \in \mathcal{H}$  beliebig,  $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$  die jeweiligen Moreau Zerlegungen mit  $u_1, v_1 \in \mathcal{K}, u_2, v_2 \in \mathcal{K}^*$  und  $\langle u_1, u_2 \rangle = 0, \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .

Dann gilt

$$\|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2 \leq \|u - v\|^2$$

Insbesondere ist die Moreau Projektion Lipschitz-stetig mit Konstante 1.

BEWEIS: Auf Grund der Definition des dualen Kegels  $\mathcal{K}^*$  gilt:

$$\langle u_1, v_2 \rangle \leq 0 \quad \text{und} \quad \langle v_1, u_2 \rangle \leq 0.$$

Wegen dieser Ungleichungen und den Voraussetzungen des Satzes, gilt:

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \langle u_1 + u_2 - v_1 - v_2, u_1 + u_2 - v_1 - v_2 \rangle \\
&= \langle (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2), (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) \rangle \\
&= \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2 + 2\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle \\
&= \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2 + 2\langle u_1, u_2 \rangle + 2\langle v_1, v_2 \rangle - 2\langle u_1, v_2 \rangle - 2\langle v_1, u_2 \rangle \\
&= \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2 - 2\langle u_1, v_2 \rangle - 2\langle v_1, u_2 \rangle \\
&\geq \|u_1 - v_1\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2.
\end{aligned}$$

□

Wir wollen jetzt die folgende spezielle Situation genauer untersuchen:

Sei  $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$  eine Kugel um den Ursprung und  $\mathcal{H} = H_0^k(\Omega)$ , versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H_0^k} = \begin{cases} \int_{\Omega} (\Delta^{k/2} u)(\Delta^{k/2} v) dx, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \int_{\Omega} (\nabla \Delta^{(k-1)/2} u)(\nabla \Delta^{(k-1)/2} v) dx, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

der zu betrachtende Hilbertraum. Der Kegel bezüglich welchem zerlegt werden soll, sei

$$\mathcal{K} = \{u \in H_0^k(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $\mathcal{K}$  abgeschlossen ist. Dazu betrachte eine Funktion  $u \in H_0^k(\Omega) \setminus \mathcal{K}$ , für diese Funktion existiert eine Menge  $M \subset \Omega$  positiven Maßes, so dass  $u(x) < 0$  für alle  $x \in M$ . Für beliebiges  $v \in \mathcal{K}$  haben wir dann

$$\|u - v\|_{H_0^k(\Omega)} \geq \frac{1}{C} \|u - v\|_{L^2(M)} \geq \frac{1}{C} \|u\|_{L^2(M)} > 0.$$

Also ist das Komplement von  $\mathcal{K}$  offen und damit  $\mathcal{K}$  abgeschlossen.

Der zu  $\mathcal{K}$  duale Kegel  $\mathcal{K}^*$  entspricht dann der Menge aller schwachen Unterlösungen der polyharmonischen Gleichung unter Dirichlet Randbedingungen, also

$$\mathcal{K}^* = \{v \in H_0^k(\Omega) \mid \langle v, u \rangle_{H_0^k} \leq 0 \ \forall u \in \mathcal{K}\}.$$

Schauen wir uns  $\mathcal{K}^*$  etwas genauer an:

**Lemma 7** *Sei  $v \in \mathcal{K}^*$ , dann gilt  $v(x) \leq 0$  für fast alle  $x \in \Omega$ , d.h.  $\mathcal{K}^* \subset -\mathcal{K}$ .*

BEWEIS: Sei  $v \in \mathcal{K}^*$  und  $f \in C_0^\infty(\Omega) \cap \mathcal{K}$  eine beliebige Funktion. Des Weiteren betrachten wir folgendes Problem:

$$\begin{cases} (-\Delta)^k u = f & \text{in } \Omega \\ D^K u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \quad K = 0, \dots, k-1; \end{cases}$$

Wegen der Positivität der Greenschen Funktion

$$G_{k,n} = c_{k,n} |x - y|^{2k-n} \int_1^{|x|y-x|/|x-y|} (v^2 - 1)^{k-1} v^{1-n} dv, \quad (5)$$

wobei  $c_{k,n} > 0$  eine wohlbekannte Konstante ist, gilt  $u \in \mathcal{K}$ . Dieses liefert uns

$$0 \geq \langle v, u \rangle_{H_0^k} = \int_{\Omega} v(-\Delta)^k u = \int_{\Omega} v f.$$

Da diese Ungleichung für alle  $f \in C_0^\infty(\Omega) \cap \mathcal{K}$  gilt, folgt wegen eines Dichtheitsargumentes, dass  $\int v f \leq 0$  für alle  $f \in L^2(\Omega)$  mit  $f(x) \geq 0$  f.ü.. Dies zeigt uns  $v(x) \leq 0$  f.ü.. Damit ist gezeigt  $\mathcal{K}^* \subset -\mathcal{K}$ .  $\square$

Nachdem wir soeben zwei, für den weiteren Verlauf, wichtige Eigenschaften bewiesen haben, kommen wir jetzt zum Hauptgegenstand dieser Arbeit:

### 3 Explizite Beispiele

Nun wollen wir uns einige explizite Beispiele ansehen, um herauszufinden wie die Zerlegung in speziellen Situationen funktioniert. Sei also im folgenden  $\mathcal{H} = H_0^1(-1, 1)$ , ausgestattet mit dem Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-1}^1 u'(x)v'(x)dx$ , der gegebene Hilbertraum. Der Kegel, bezüglich welchem wir zerlegen, sei der konvexe und abgeschlossene Kegel der nichtnegativen Funktionen  $\mathcal{K} = \{v \in H_0^1(-1, 1) : v \geq 0 \text{ f.ü.}\}$ . Folgendes Beispiel habe ich aus [3] entnommen.

**Beispiel 8** *Beginnen wollen wir mit der Moreau Zerlegung  $u = u_1 + u_2$  der negativen Spitze :*

Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\varepsilon} - 1, & \text{falls } |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Des Weiteren sei  $u_2(x) = |x| - 1$ , dann folgt für die Funktion  $u_1(x)$ :

$$u_1(x) = u_\varepsilon(x) - u_2(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{\varepsilon} - |x|, & \text{falls } |x| \leq \varepsilon \\ 1 - |x|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich für die Zerlegung von  $u_\varepsilon(x)$  folgende Veranschaulichung:

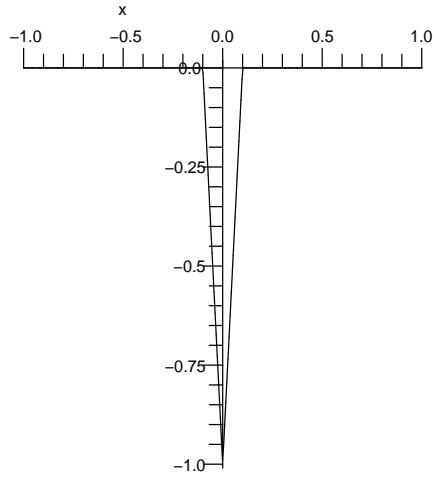


Abbildung 1: Ein negative Spitze:  $u_{0,1}(x)$

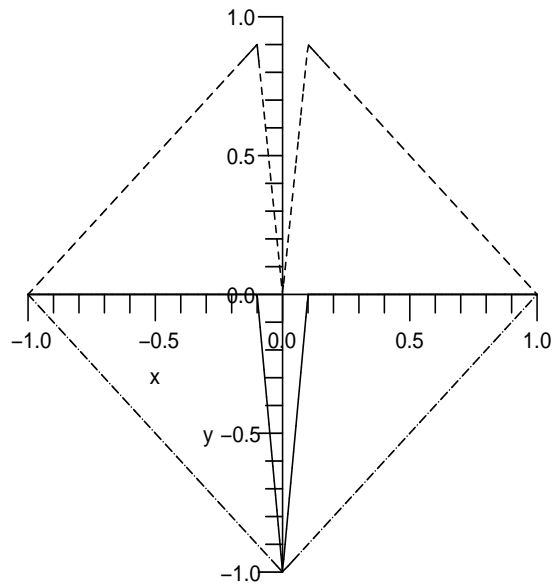


Abbildung 2: Moreau Zerlegung von  $u_{0,1}(x)$

Um zu zeigen, dass unsere Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  der Moreau Zerlegung von  $u_\varepsilon$  bzgl.  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}^*$  genügen, ist es notwendig und hinreichend, dass wir folgende Eigenschaften nachweisen:

$$(\alpha) u_1 \in \mathcal{K}, \quad (\beta) \langle u_2, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{K}, \quad (\gamma) \langle u_2, u_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (6)$$

Auf Grund der Definition von  $u_1(x)$  (siehe auch Abb. 2) haben wir, dass



$u_1(x) \geq 0$  und somit  $u_1 \in \mathcal{K}$  ist. Sei nun  $\varphi \in \mathcal{K}$  beliebig. Dann gilt

$$\langle u_2, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-1}^1 u_2'(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = -2\varphi(0) \leq 0,$$

also  $(\beta)$ , was wiederum  $u_2 \in \mathcal{K}^*$  entspricht. Wenn wir jetzt noch  $\varphi$  durch  $u_1$  ersetzen und beachten, dass  $u_1(0) = 0$ , folgt  $(\gamma)$ . Zusammen genommen, haben wir gezeigt  $u_\varepsilon = u_1 + u_2$  ist die gesuchte Moreau Zerlegung.  $\square$

**Folgerung 9** Die  $H_0^1$ -Moreau Projektion ist im  $L^2$  unstetig.

Nun wollen wir unser obiges Beispiel ein wenig ausbauen und statt einer, zwei negative Spitzen betrachten:

**Beispiel 10** Ziel ist es jetzt die Moreau Zerlegung zu berechnen, für:

Sei  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ .

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -m(\varepsilon)x - n_1(\varepsilon), & \text{falls } x \in (\varepsilon - 1, -\frac{1}{2}) \\ m(\varepsilon)x + n_2(\varepsilon), & \text{falls } x \in [-\frac{1}{2}, -\varepsilon) \\ -m(\varepsilon)x + n_2(\varepsilon), & \text{falls } x \in (\varepsilon, \frac{1}{2}) \\ m(\varepsilon)x - n_1(\varepsilon), & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1 - \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

mit  $m(\varepsilon) = \frac{2}{1-2\varepsilon}$ ,  $n_1(\varepsilon) = 2 \left( \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right)$  und  $n_2(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ .

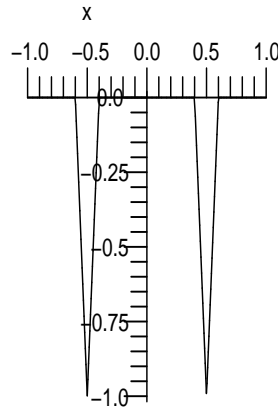


Abbildung 3: Zwei negative Spitzen:  $u_{0.4}(x)$

Wir werden jetzt ähnlich wie Beispiel 8 vorgehen. Wir zeigen jetzt, dass

$$u_2(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{falls } x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ -1, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 2, & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

unsere gesuchte Funktion ist. Dazu müssen wir wieder nachweisen, dass die Bedingungen  $(\alpha)$ - $(\gamma)$  (siehe dazu (6)) gelten. Man erhält also

$$u_1 = u_\varepsilon - u_2 = \begin{cases} 2x + 2, & \text{falls } x \in (-1, \varepsilon - 1) \\ -m_1(\varepsilon)x - n_2(\varepsilon), & \text{falls } x \in [\varepsilon - 1, -\frac{1}{2}] \\ m(\varepsilon)x + n_3(\varepsilon), & \text{falls } x \in [-\frac{1}{2}, -\varepsilon] \\ 1, & \text{falls } x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ -m(\varepsilon)x + n_3(\varepsilon), & \text{falls } x \in (\varepsilon, \frac{1}{2}) \\ m_1(\varepsilon)x - n_2(\varepsilon), & \text{falls } x \in [\frac{1}{2}, 1 - \varepsilon] \\ -2x + 2, & \text{falls } x \in [1 - \varepsilon, 1) \end{cases}, \quad (8)$$

wobei  $m_1(\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot m(\varepsilon)$ ,  $n_3(\varepsilon) = \frac{m(\varepsilon)}{2}$  und  $m(\varepsilon)$ ,  $n_2(\varepsilon)$  aus (7) die Koeffizientenfunktionen seien. Wenn man jetzt Gleichung (8) betrachtet (und auch die Abb.4), folgt

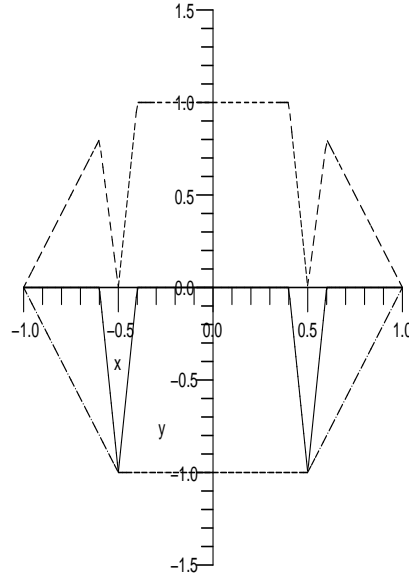


Abbildung 4: Moreau Zerlegung von  $u_{0.4}(x)$

$u_1 \in \mathcal{K}$ . Sei nun wieder  $\varphi \in \mathcal{K}$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u_2, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{-1}^1 u_2'(x) \varphi'(x) dx \\ &= -2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \varphi'(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0 \cdot \varphi'(x) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi'(x) dx \\ &= -2 \left( \varphi \left( -\frac{1}{2} \right) + \varphi \left( -\frac{1}{2} \right) \right) \leq 0, \end{aligned}$$

also  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Man ersetze wieder  $\varphi$  durch  $u_1$  und wegen  $u_1(\pm\frac{1}{2}) = 0$ , folgt  $(\gamma)$ . Also ist  $u_1 + u_2$  die Moreau Zerlegung von  $u_\varepsilon$ .  $\square$

Bevor wir noch weitere Beispiele angeben, wollen wir uns die bisherigen etwas genauer ansehen. Wichtig für die Zerlegung war bisher immer das Auffinden einer geeigneten Funktion  $u_2$ . Wie findet man also solche Funktionen am schnellsten?

Versuchen wir eine physikalische Begründung für die Wahl von  $u_2$  anzugeben. Betrachten wir folgende Situation: Es sei ein Gummiband zwischen  $(-1,1)$  gespannt. Die Frage lautet nun: Wie ist die Lage des Bandes, wenn wir, wie in Abb.1, eine negative Spitze gegeben hätten, welche das Band nach unten dehnt? Wie wir in Beispiel 8 sehen, ist das obige  $u_2$  eine Lösung des Problems. An dieser Stelle möchte ich auf Kapitel 4 verweisen, in welchem genau diese Fragestellung genauer untersucht wird. Wir wollen folgendes Beispiel unter genau diesem Gesichtspunkt betrachten.

**Beispiel 11** Jetzt soll es darum gehen, für  $k \in \mathbb{N}$  die Moreau Zerlegung von

$$u_k(x) = \begin{cases} k^2 x^2 - 1, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{k}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu berechnen. Wenn wir uns Abb.5-6 ansehen, kommen wir unter dem eben genannten physikalischen Aspekt, zu der Vermutung

$$u_2(x) = \begin{cases} -a(k)(x+1), & \text{falls } x \in (-1, -x_0) \\ k^2 x^2 - 1, & \text{falls } |x| \leq x_0 \\ a(k)(x-1), & \text{falls } x \in (x_0, 1) \end{cases},$$

mit  $a(k) = 2k(k - \sqrt{k^2 - 1})$ ,  $x_0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$ , könnte die gesuchte Funktion sein.

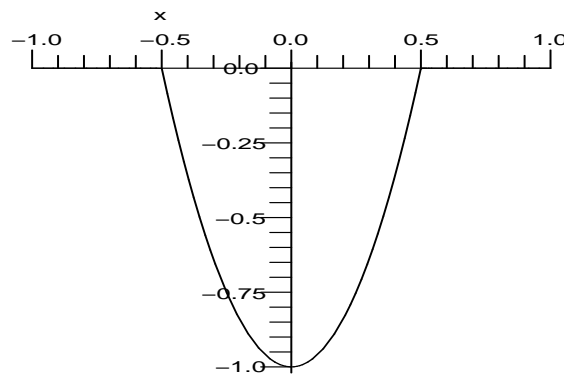


Abbildung 5:  $u_{k=2}(x)$

Dann gilt:

$$u_1(x) = u_k - u_2 = \begin{cases} a(k)(x+1), & \text{falls } x \in (-1, -\frac{1}{k}] \\ k^2x^2 + a(k)(x+1) - 1, & \text{falls } x \in (\frac{1}{k}, -x_0) \\ 0, & \text{falls } |x| \leq x_0 \\ k^2x^2 - a(k)(x-1) - 1, & \text{falls } x \in (x_0, \frac{1}{k}) \\ -a(k)(x-1), & \text{falls } x \in [\frac{1}{k}, 1) \end{cases},$$

$a(k)$  und  $x_0$  wie oben.

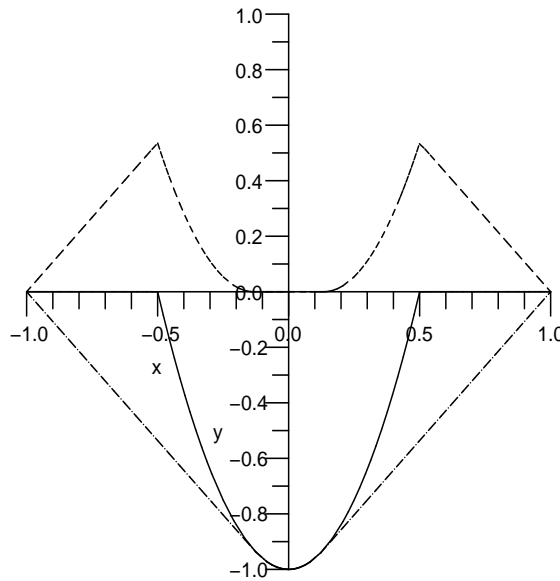


Abbildung 6: Moreau Zerlegung von  $u_{k=2}(x)$

Sei  $\varphi \in \mathcal{K}$  beliebig. Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle u_2, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{-1}^1 u_2'(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 u_2''(x) \varphi(x) dx \\ &= - \left[ \int_{-1}^{-x_0} \underbrace{u_2''(x)}_{\equiv 0} \varphi(x) dx + \int_{-x_0}^{x_0} u_2''(x) \varphi(x) dx + \int_{x_0}^1 \underbrace{u_2''(x)}_{\equiv 0} \varphi(x) dx \right] \\ &= - \int_{-x_0}^{x_0} u_2''(x) \varphi(x) dx = -2k^2 \int_{-x_0}^{x_0} \varphi(x) dx \leq 0, \end{aligned}$$

also ist  $(\beta)$  gezeigt, d.h.  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Das Nachweisen von  $(\alpha)$  erübrigt sich wie oben durch Betrachten von Abb.6 und der Definition von  $u_1$ . Da  $u_1 \equiv 0$  auf  $[-x_0, x_0]$  folgt nach Ersetzen von  $\varphi$  in obiger Integralabschätzung,  $(\gamma)$   $\langle u_2, u_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ . Damit ist gezeigt:  $u_1 + u_2$  bilden die Moreau Zerlegung von  $u_k$ .  $\square$

Da wir bis jetzt nur negative Funktionen betrachtet haben, ist es natürlich auch interessant den Einfluss von eventuellen Positivanteilen auf die Funktion  $u_2$  genauer zu untersuchen. Die folgenden Beispiele zeigen, dass die Positivanteile für die Wahl von  $u_2$  ohne Bedeutung sind, sich also nur auf den  $u_1$  Anteil in der Zerlegung auswirken.

**Beispiel 12** *Betrachte nun:*

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -m(\varepsilon)x - n_1(\varepsilon), & \text{für } x \in (\varepsilon - 1, -\frac{1}{2}) \\ m(\varepsilon)x + n_2(\varepsilon), & \text{für } x \in [-\frac{1}{2}, -\varepsilon] \\ m(\varepsilon)x - n_2(\varepsilon), & \text{für } x \in (\varepsilon, \frac{1}{2}] \\ -m(\varepsilon)x + n_1(\varepsilon), & \text{für } x \in (\frac{1}{2}, 1 - \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (9)$$

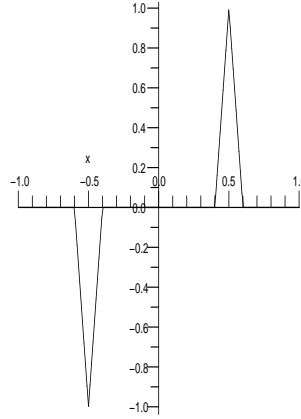


Abbildung 7: Eine positive und eine negative Spitze:  $u_\varepsilon(x)$

Die Koeffizientenfunktionen seien definiert wie in Beispiel 10. Sei jetzt

$$u_2(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , \text{falls } x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ \frac{2}{3}(x - 1) & , \text{falls } x \in (-\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad \text{und}$$

$$u_1 = u_\varepsilon - u_2 = \begin{cases} 2x + 2, & \text{für } x \in (-1, \varepsilon - 1) \\ -m_1(\varepsilon)x - n_2(\varepsilon), & \text{für } x \in [\varepsilon - 1, -\frac{1}{2}) \\ m(\varepsilon)x + n_3(\varepsilon), & \text{für } x \in [-\frac{1}{2}, -\varepsilon] \\ -\frac{2}{3}(x - 1), & \text{für } x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ (m(\varepsilon) - \frac{2}{3})x - n_2(\varepsilon) + \frac{2}{3}, & \text{für } x \in (\varepsilon, \frac{1}{2}) \\ -(m(\varepsilon) + \frac{2}{3})x + n_1(\varepsilon) + \frac{2}{3}, & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1 - \varepsilon) \\ -\frac{2}{3}(x - 1), & \text{für } x \in [1 - \varepsilon, 1) \end{cases}$$

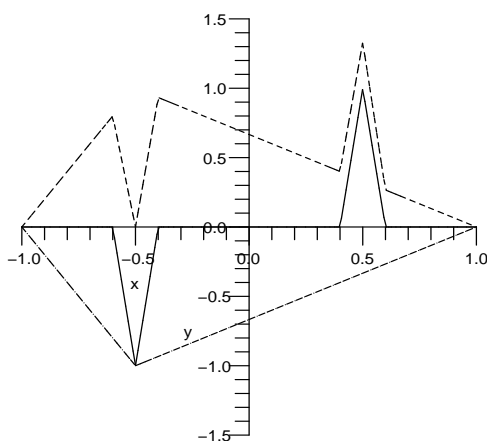


Abbildung 8: Zerlegung von  $u_\varepsilon(x)$

Offensichtlich ist  $u_1 \in \mathcal{K}$ . Zu  $(\beta)$ : Sei  $\varphi \in \mathcal{K}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u_2, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{-1}^1 u_2'(x) \varphi'(x) dx \\ &= -2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \varphi'(x) dx + \frac{2}{3} \int_{-\frac{1}{2}}^1 \varphi'(x) dx \\ &= -\frac{8}{3} \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

Daraus folgt  $u_2(x) \in \mathcal{K}^*$ . Mit  $u_1(-\frac{1}{2}) = 0$  haben wir  $\langle u_2, u_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ . Damit ist gezeigt, dass  $u_\varepsilon = u_1 + u_2$  alle Bedingungen der Moreau Zerlegung erfüllen.  $\square$

Nachdem wir einige Situationen, die im Hilbertraum  $H_0^1$  auftreten können, anschaulich dargestellt haben, möchten wir nun noch zwei Beispiele für den Fall  $u \in H_0^2$  angeben.

**Beispiel 13** Sei  $\mathcal{H} = H_0^2(-1, 1)$ , versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-1}^1 u''(x) v''(x) dx,$$

der gegebene Hilbertraum. Der Kegel, bezüglich welchem wir zerlegen wollen, sei jetzt:

$$\mathcal{K} = \{v \in H_0^2(-1, 1) : v \geq 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Betrachte

$$u(x) = \begin{cases} 256x^6 - 144x^4 + 24x^2 - 1, & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

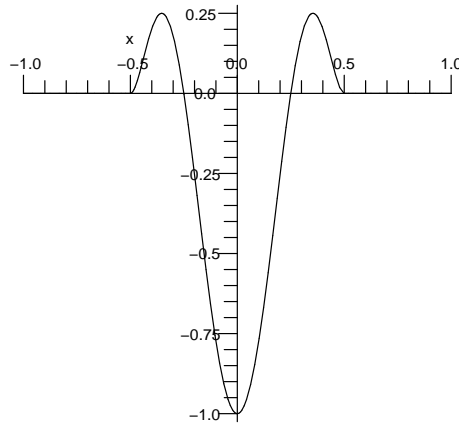


Abbildung 9:  $u(x)$

Das Vorgehen entspricht dem aus den vorherigen Beispielen. Sei nun

$$u_2(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{falls } x \in (-1, 0] \\ -2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{falls } x \in (0, 1) \end{cases}$$

gegeben und somit

$$u_1(x) = u(x) - u_2(x) = \begin{cases} -2x^3 - 3x^2 + 1, & \text{falls } x \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ 256x^6 - 144x^4 - 2x^3 + 21x^2, & \text{falls } x \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ 256x^6 - 144x^4 + 2x^3 + 21x^2, & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2x^3 - 3x^2 + 1, & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Es folgt wieder leicht  $u_1 \geq 0$ , also  $u_1 \in \mathcal{K}$ . Wir müssen jetzt noch zeigen  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Dazu betrachten wir ein beliebiges  $\varphi \in \mathcal{K}$ , man erhält dann nach partieller Integration:

$$\begin{aligned} \langle u_2, \varphi \rangle_{H_0^2} &= \int_{-1}^0 u_2''(x) \varphi''(x) dx + \int_0^1 u_2''(x) \varphi''(x) dx \\ &= u_2''(0) \varphi'(0) - u_2''(-1) \varphi'(-1) - \int_{-1}^0 u_2'''(x) \varphi'(x) dx \\ &\quad + u_2''(1) \varphi'(1) - u_2''(0) \varphi'(0) - \int_0^1 u_2'''(x) \varphi'(x) dx \\ &= -12 \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + 12 \int_0^1 \varphi'(x) dx = -24 \varphi(0) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

also  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Wir ersetzen noch  $\varphi$  durch  $u_1$  und haben somit  $\langle u_2, u_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ . Alles zusammen ergibt die gesuchte Moreau Zerlegung  $u = u_1 + u_2$ .  $\square$

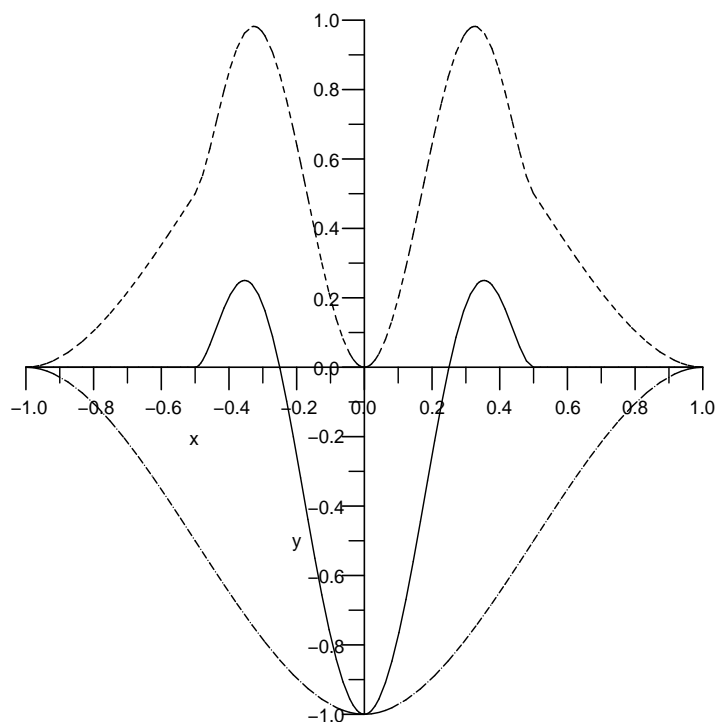


Abbildung 10: Moreau Zerlegung von  $u(x)$

Die physikalische Interpretation entspricht der oben gegebenen, nur das wir das Gummiband durch einen in  $(-1,0)$  und  $(1,0)$  eingespannten elastischen Stab ersetzt haben. Wir betrachten unter diesem Aspekt das folgende

**Beispiel 14** Sei  $\mathcal{H} = H_0^2(-2, 2)$ , versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-2}^2 u''(x)v''(x)dx,$$

der gegebene Hilbertraum. Der Kegel bezüglich welchem wir zerlegen wollen sei jetzt:

$$\mathcal{K} = \{v \in H_0^2(-2, 2) : v \geq 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Betrachte

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{16}{25}x^6 + \frac{72}{25}x^4 - \frac{81}{25}x^2, & \text{falls } |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir werden jetzt ähnlich vorgehen wie in den vorherigen Beispielen. Sei nun

$$u_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x^3 + 3x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in (-2, -1) \\ \frac{3}{5}x^2 - \frac{8}{5}, & \text{falls } |x| \leq 1 \\ -\frac{4}{5}x^3 + 3x^2 - \frac{12}{5}x - \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in (1, 2) \end{cases}$$



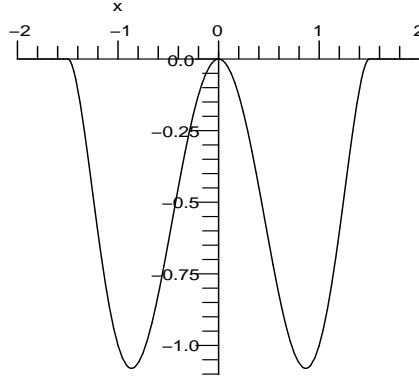


Abbildung 11: Funktion  $u(x) \in H_0^2(-2, 2)$

gegeben und somit

$$u_1(x) = u(x) - u_2(x) = \begin{cases} -\frac{4}{5}x^3 - 3x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in (-2, -\frac{3}{2}) \\ -\frac{16}{25}x^6 + \frac{72}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - \frac{156}{25}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in [-\frac{3}{2}, -1) \\ -\frac{16}{25}x^6 + \frac{72}{25}x^4 - \frac{96}{25}x^2 + \frac{8}{5}, & \text{falls } |x| \leq 1 \\ -\frac{16}{25}x^6 + \frac{72}{25}x^4 + \frac{4}{5}x^3 - \frac{156}{25}x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in (1, \frac{3}{2}] \\ \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{4}{5}, & \text{falls } x \in (\frac{3}{2}, 2) \end{cases}.$$

Wenn man sich die Abbildung ansieht (oder auch Definition von  $u_1$ ), folgt  $u_1 \in \mathcal{K}$ . Wir müssen jetzt noch zeigen  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Dazu betrachten wir ein beliebiges  $\varphi \in \mathcal{K}$ . Dann liefert uns partielle Integration:

$$\begin{aligned} \langle u_2, \varphi \rangle_{H_0^2} &= \int_{-2}^{-1} u_2''(x) \varphi''(x) dx + \int_{-1}^1 u_2''(x) \varphi''(x) dx + \int_1^2 u_2''(x) \varphi''(x) dx \\ &= u_2''(-1) \varphi'(-1) - u_2''(-2) \varphi'(-2) - \int_{-2}^{-1} u_2'''(x) \varphi'(x) dx \\ &\quad + u_2''(1) \varphi'(1) - u_2''(-1) \varphi'(-1) - \int_{-1}^1 u_2'''(x) \varphi'(x) dx \\ &\quad + u_2''(2) \varphi'(2) - u_2''(1) \varphi'(1) - \int_1^2 u_2'''(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\frac{24}{5} \int_{-2}^{-1} \varphi'(x) dx - \int_{-1}^1 0 \cdot \varphi'(x) dx + \frac{24}{5} \int_1^2 \varphi'(x) dx \\ &= -\frac{24}{5} (\varphi(-1) + \varphi(1)) \leq 0 \end{aligned}$$

also  $u_2 \in \mathcal{K}^*$ . Wir ersetzen wieder  $\varphi$  durch  $u_1$  mit  $u_1(\pm 1) = 0$  und erhalten somit  $\langle u_2, u_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ . Also ist  $u = u_1 + u_2$  die gesuchte Moreau Zerlegung.  $\square$

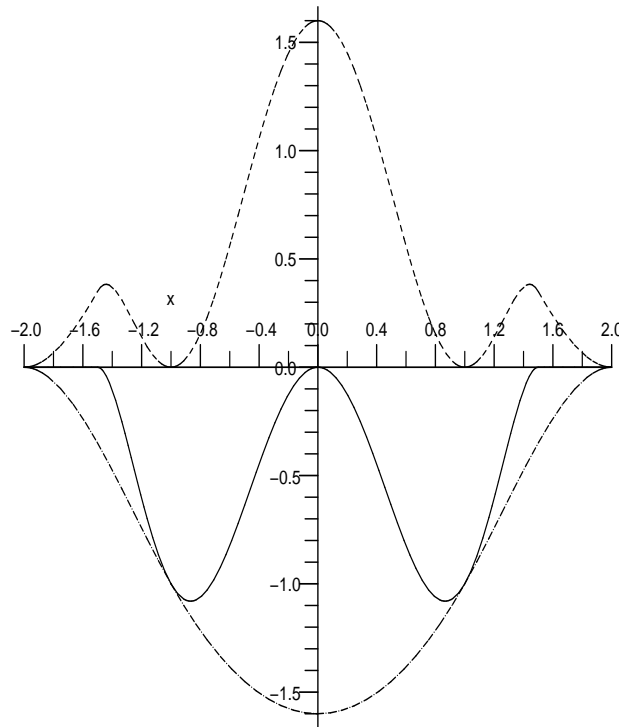


Abbildung 12: Moreau Zerlegung von  $u(x)$

## 4 Zusammenhang mit Hindernisproblem

Ziel soll es jetzt sein das Auffinden der Moreau-Zerlegung  $u = u_1 + u_2$  für ein  $u \in H_0^1$  als Minimierungsproblem zu formulieren. In diesem Kontext soll auch eine Variationsungleichung für das besagte Problem präsentiert werden. Abschließend wollen wir das Hindernisproblem, welches unser Minimierungsproblem darstellt, für allgemeinere Situationen definieren und einige grundlegende Resultate diesbezüglich angeben. Siehe dazu auch [5].

Sei also wieder  $\mathcal{H} = H_0^1((\alpha, \beta))$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\alpha}^{\beta} u'(x)v'(x)dx,$$

der betrachtete Hilbertraum und der konvexe Kegel, bezüglich welchem wir zerlegen wollen, sei

$$\mathcal{K} = \{v \in H_0^1((\alpha, \beta)) : v \geq 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Wie bereits in Kapitel 3 gesehen entspricht die Suche nach  $u_2$  bzw.  $u_1$  folgendem Minimierungsproblem:

Sei  $u \in \mathcal{H}$  gegeben. Finde  $u_1 \in \mathcal{K}$  so, dass  $\|u - u_1\|_{\mathcal{H}} = \|u_2\|_{\mathcal{H}}$  minimal wird unter der Nebenbedingung, dass  $u_2 \leq u$  f.ü. (mit  $u_2 \in \mathcal{K}^* \subset -\mathcal{K}$ ). Also gesucht ist

$$u_2 \in \mathcal{K}_u := \{v \in \mathcal{K}^* : v \leq u \text{ f.ü.}\} : \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla u_2(x)|^2 dx = \min! \quad (10)$$

Dieses Minimierungsproblem heißt *Hindernisproblem*, da durch die Nebenbedingung  $u_2 \leq u$  f.ü. ein Hindernis gegeben ist.

**Lemma 15** *Die absoluten Minima  $u_2 \in \mathcal{K}_u$  von (10) sind die Lösungen der Variationsungleichung:*

$$\langle u_2, v - u_2 \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_u. \quad (11)$$

BEWEIS: Sei  $u_2$  ein absolutes Minimum und  $v \in \mathcal{K}_u$ . Da  $\mathcal{K}_u$  eine konvexe Teilmenge von  $\mathcal{H}$  ist, ist auch die Konvexkombination  $(1-t)u_2 + tv \in \mathcal{K}_u$ , für  $0 < t \leq 1$ . Also

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla u_2(x)|^2 dx &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla((1-t)u_2(x) + tv(x))|^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla u_2(x) + t\nabla(v - u_2)(x)|^2 dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla u_2(x)|^2 + 2t \int_{\alpha}^{\beta} \nabla u_2(x) \nabla(v - u_2)(x) dx \\ &\quad + t^2 \int_{\alpha}^{\beta} |\nabla(v - u_2)(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch durch  $t$  dividieren und  $t \searrow 0$  erhalten wir

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \nabla u_2 \nabla(v - u_2) dx = \langle u_2, v - u_2 \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{K}_u,$$

d.h. das absolute Minimum  $u_2$  erfüllt die Variationsungleichung.  $\square$

Jetzt wollen wir das allgemeinere Hindernisproblem formulieren.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, zusammenhängend und glatt berandet. Des Weiteren erfülle  $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$

$$(1/\Lambda)\xi^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda\xi^2 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer Elliptizitätskonstante  $\Lambda$ . Wir definieren dann die Abbildung

$$L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega) \quad \text{mit } \langle Lu, v \rangle = a(u, v) \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei wir  $a(u, v)$  folgendermaßen setzen:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_j}(x)v_{x_i}(x)dx \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Wir geben uns jetzt ein ‘‘Hindernis’’  $\psi \in H^1(\Omega)$  vor, welches zusätzlich  $\psi \leq 0$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt. Weiter sei  $\mathcal{K}_{\psi} = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \geq \psi(x) \text{ f.ü.}\}$ .

Nach den eben zusammengetragenen Voraussetzungen können wir jetzt das Hindernisproblem wie folgt formulieren:

**Problem 1:** Finde zu gegebenem  $f \in H^{-1}$  ein  $u \in \mathcal{K}_{\psi}$  so, dass gilt:

$$a(v, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \text{für alle } v \in \mathcal{K}_{\psi}. \quad (12)$$

Jetzt stellt sich die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (12).  
Dazu:

**Satz 16** *Es existiert eine eindeutige Lösung  $u \in \mathcal{K}_\psi$  von Problem 1.*

Der Beweis ist nachzulesen in [5].

Mit diesem Existenz- und Eindeutigkeitsresultat wollen wir den Fall untersuchen, wir hätten die Lösung  $u \in \mathcal{K}_\psi$  zum “Hindernis”  $\psi$  von (12) gefunden. Wir teilen dann die Menge  $\Omega$  in zwei Teilmengen:

- (i)  $G := \{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\}$  (offen)
- (ii)  $I = I[u] = \Omega \setminus G = \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\}$ , (abgeschlossen).

**Definition 17** *Die Menge  $I$  wird die Übereinstimmungsmenge (engl. coincidence set) der Lösung  $u$  genannt.*

Folgender Satz soll den Schlusspunkt dieser Arbeit bilden:

**Satz 18** *Sei  $u \in \mathcal{K}_\psi$  die Lösung von Problem 1. Dann existiert ein nichtnegatives Radon-Maß  $\mu$  (d.h. auf  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen erklärt, positiv  $\sigma$ -additiv und endlich für kompakte Mengen) so, dass*

$$Lu = f + \mu \quad \text{in } \Omega$$

mit

$$\text{supp } \mu \subset I = \{x \in \Omega : u(x) = \psi(x)\}$$

Insbesondere,

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega \setminus I.$$

## Literatur

- [1] K.Deckelnick, *Lineare Funktionalanalysis*, VORLESUNGSSKRIPT (2003/04)
- [2] J.J. Moreau, *Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires*, C. R. ACAD. SCI. PARIS, **255**, 238-240 (1962)
- [3] H.-Ch. Grunau, *Lipschitz continuity of the decomposition with respect to dual cones*, MANUSKRIFT (2004)
- [4] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, *Critical dimensions and higher order Sobolev inequalities with remainder terms*, NODEA NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS APPL., **8**, 35-44 (2001)
- [5] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, ACADEMIC PRESS, (1980)