Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, M.Sc. Hazem Yaghi

06. Juni 2019

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

9. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{10}x_1^2 + \sin x_2 \\ x_2 &= \cos x_1 + \frac{1}{10}x_2^2 \end{aligned}$$

mit dem Newton-Verfahren. Vergleichen Sie die Konvergenz mit der Fixpunktiterationen, wenn jeweils der Startwert $x^{(0)} = (0.9, 0.6)$ verwendet werden.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Die reellen Funktionen $g_i(x)$, $i = 1, ..., N$ sind auf dem Intervall (a, b) linear unabhängig, wenn die Wronski-Determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} g_1(x) & ... & g_N(x) \\ g_1'(x) & ... & g_N'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1^{(N-1)}(x) & ... & g_N^{(N-1)}(x) \end{vmatrix}$$

auf dem Intervall (a, b) nicht identisch Null ist.

(a) Nutzen Sie dieses Kriterium um zu zeigen, dass die Funktionen $1, x^1, x^2, ..., x^{N-1}$ für $x \in \mathbb{R}$ ein Tschebyschew-System sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $1, e^x, e^{2x}, ..., e^{nx}$ für $x \in \mathbb{R}$ ebenfalls ein Tschebyschew-System sind.

(c) Die Funktionen $1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, ..., cosnx, sinnx$ sind linear unabhängig. Zeigen Sie, dass diese Funktionen für $x \in [0, 2\pi)$ ein Tschebyschew-System bilden.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $P_n = span(1, x, ..., x^n)$ der Haar-Raum der Polynome n-ten Grads. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

für $a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq b$, heißt Vandermondsche Determinante. Beweisen Sie

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k)$$

durch vollständige Induktion.

(Die Aufgaben sind am 13. Juni 2019 in der Übung abzugeben.)