

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

3. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

kann auch verwendet werden um den Wert von $\exp(x)$ zu ermitteln.

- (a) Implementieren Sie einen entsprechenden Algorithmus, indem Sie solange summieren bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert.
- (b) Testen Sie das Programm für $x = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm 20$ und bestimmen Sie den relativen Fehler (bezogen auf das Resultat der Standardfunktion in MATLAB). Welche Effekte können beobachtet werden? Geben Sie mögliche Erklärungen an.
- (c) Überlegen Sie sich einen Algorithmus, der ebenfalls die Reihendarstellung nutzt und bessere Ergebnisse liefert. Vergleichen Sie dazu wieder Ihren Algorithmus mit der Standardfunktion für die oben angegebenen Werte.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Welche der folgenden Darstellungen liefert, bei sechsstelliger Gleitkommarechnung, eine bessere Lösung für den exakten Wert von $f(x)$ an der Stelle $x = 0.01$.

(a) $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2},$

(b) $p(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$ (Polynom für $f(x)$ vom Grad zwei).

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Wert $y = 0.5016708416\dots$ und erklären Sie Ihre Beobachtung.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die einer Vektornorm zugeordneten Matrixnorm

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

hat auch die Eigenschaften einer Norm, d.h.

$$A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

(b)

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

(c) Die *Frobenius-Norm*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,N} |a_{ij}|^2}$$

ist eine Matrixnorm, die sich nicht in der unter (a) angegebenen Form einer Matrixnorm zuordnen lässt.

(d) Die der Maximum-Norm

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$$

zugeordnete Matrixnorm ist gerade die Zeilensummen-Norm

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,N} \left(\sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right).$$

(Die Aufgaben sind am 25. April 2019 in der Übung abzugeben.)