

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

8. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte). Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle des linearen Taylor-Polynoms, das bei x^k entwickelt wurde. Verwendet man stattdessen das quadratische Taylor-Polynom, so erhält man ein erweitertes Newton-Verfahren. Geben Sie dessen Verfahrensvorschrift an. Berechnen Sie die Nullstelle ξ von $f(x) = e^x - 2$ mit beiden Verfahren zum Startwert $x^0 = 1$ und geben Sie die aus x^0 , x^1 und x^2 gewonnene numerische Konvergenzordnung an. Stellen Sie den Fehler $\|x^k - \xi\|$ über k graphisch dar.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Gegeben sei die Funktion $f(x) = \arctan(x)$ mit der Nullstelle $x^* = 0$.

- (a) Stellen Sie das dazugehörige Newton-Verfahren $x^{k+1} = h(x^k)$ auf.
- (b) Man zeige, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung von x^* für einen Startwert $x^0 \neq 0$ eine alternierende Folge x^k erzeugt, d.h. für alle k gilt $\text{sign}(x^k) \neq \text{sign}(x^{k+1})$.
Hinweis: Untersuchen Sie $h(x)$ auf Monotonie.
- (c) Es sei Funktion $g(s) := \tan\left(\frac{2s}{1+s^2}\right)$ gegeben. Zeigen Sie, dass g für $s \in (0, \infty)$ genau einen Fixpunkt $g(s) = s$ besitzt.
Hinweis: Untersuchen Sie $g(s)$ auf Monotonie.
- (d) Geben Sie alle Startwerte $x^0 \in \mathbb{R}$ an, für die das Newton-Verfahren gegen x^* konvergiert.
- (e) Für einen festen Wert $\lambda \in (0, 1]$ sei das modifizierte Newton-Verfahren gegeben durch

$$x^{k+1} = x^k - \lambda \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Zeigen Sie, dass es kein λ gibt, so dass dieses Verfahren global konvergent ist.

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass es für jedes $\lambda \in (0, 1]$ einen Wert $R = R(\lambda) > 0$ gibt, so dass für x^k mit $|x^k| \geq R$ die Ungleichung $|x^{k+1}| > |x^k|$ erfüllt ist.

(Die Aufgaben sind am 06. Juni 2019 in der Übungen abzugeben.)