Algebra – SoSe 2018 **Übung 3**

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Prof. Dr. Benjamin Nill

Aufgabe 3.1 *Sei $\phi : G \to \bar{G}$ ein Homomorphismus, und K ein Normalteiler von $\bar{G}$. Zeigen Sie, dass*

$$N := \{x \in G : \phi(x) \in K\}$$

ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 3.2 *Finden Sie alle Untergruppen von D_4 (oder eben so viele wie möglich) und stellen Sie diese in einem Diagramm dar, durch das erkennbar wird, welche Untergruppen in welchen enthalten sind. Kennzeichnen Sie, welche davon Normalteiler und welche zyklisch sind. (Sie mssen Ihre Antworten nicht beweisen.)*

Aufgabe 3.3 *Zeigen Sie, dass eine Untergruppe H einer Diedergruppe zyklisch sein muss, falls $|H|$ ungerade ist. Tipp: 1. Isomorphiesatz.*

Aufgabe 3.4 *Sei $\phi : G \to \bar{G}$ ein Homomorphismus, $\bar{G}$ eine abelsche Gruppe, und H eine Untergruppe von G mit $H \supseteq \mathrm{Ker}(\phi)$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.*

Aufgabe 3.5 *Sei N mit $|N| = 7$ ein Normalteiler von G vom Index 22. Zeigen Sie: Ist $x \in G$ mit $x^{35} = 1$, dann ist $x \in N$. Tipp: Betrachten Sie die Faktorgruppe.*

Bonusaufgabe 3.1 *Diese Aufgabe ist NICHT zur Abgabe gedacht. Sie darf aber gerne vorgerechnet werden. Zeigen Sie (mit den Methoden und Sätzen, die uns bisher in der Vorlesung zur Verfügung stehen), dass eine Gruppe der Ordnung 33 ein Element der Ordnung 3 haben muss.*

Abgabe: Dienstag, 15. Mai 2018, zu Beginn der Übung