VL Geometrische Gruppentheorie

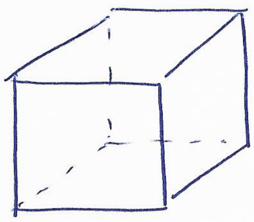
OVGU, WS 19/20

Motto: Algebraische Eigenschaften einer Gruppe spiegeln sich wider in Räumen auf denen die Gruppe wirkt.
Zusätzlich ist jede (endlich erzeugte) Gruppe selbst ein geometrisches Objekt.

I Gruppen und Räume

1. Gruppen als Symmetrien von Objekten

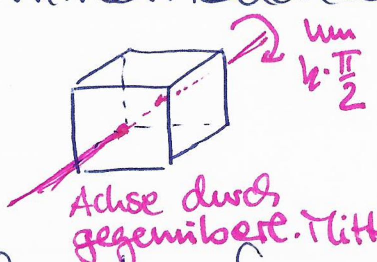
Bsp. 1.1 Symmetrien eines Würfels

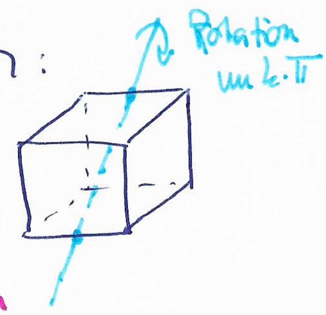


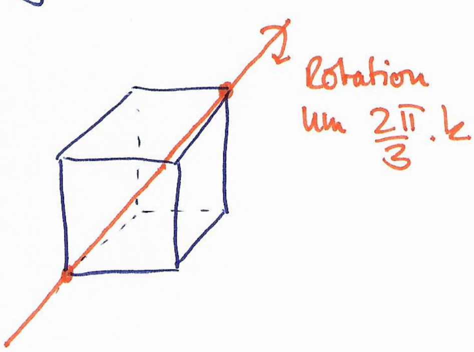
Eine orientierungserhaltende Symmetrie $\hat{=}$ Bewegung des Würfels durch hochheben und drehen und deckungsgleiches Ablegen. (keine Spiegelungen)

(man kann prinzipiell Spiegelungen zulassen, dann erhält man weitere Orientierungsumkehrende Symmetrien.)

Symmetrieachsen:







Wieviele orientierungserhaltende Symmetrien gibt es insgesamt?

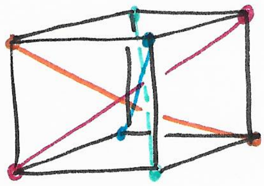
Eine Möglichkeit des Zählens:

- Jede Ecke kann an 8 Plätze gehen.
- Ist eine Ecke fest können wir die 3 Nachbarn noch vertauschen.

⇒ 24 Symmetrien.

Wie auflisten?
Was passiert, wenn man zwei hintereinander ausführt?

Eine weitere Zählmöglichkeit:



1. Jede Symmetrie vertauscht die 4 Diagonalen.
2. Jede Vertauschung der Diagonalen liefert eine eindeutige Symmetrie des Würfels.

⇝ Symmetrien des Würfels $\hat{=}$ Permutationen der Diagonalen

↑

24 = 4! Stück

Aufgs: Symmetriegr. des Würfels
$\hat{=}$ Permutationsgr. der Zahlen 1,2,3,4

Ziel: Wir werden sehen, dass jede Gruppe Symmetriegr. von einem geometr. Objekt ist.

Cayleygraph

<u>Def. 1.2</u> Eine <u>Gruppe</u> ist eine Menge G mit Verknüpfung $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ s.d. $\forall a,b,c \in G$ gilt:

a) $\cdot$ ist <u>assoziativ</u> : $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

b) $\exists$ <u>neutrales</u> Element e : $e a = a\cdot e = a$

c) $\exists$ <u>inverses</u> $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} a = a\cdot a^{-1} = e$.

Eine Teilmenge $H \subset G$ ist eine <u>Untergruppe</u>, falls H bzgl der Einschränkung von $\cdot$ auf $H \times H$ eine Gruppe ist. Wir schreiben dann $H < G$.

<u>1.3 Bsp.</u>

(1) $(\mathbb{Z},+) \subset (\mathbb{Q},+) \subset (\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

(2) <u>Die symmetrische Gruppe</u> $\rightsquigarrow$ $\cdot \hat{=}$ Verkettg von Funktionen

S_n = Permutationen von $\{1,\dots,n\}$

$= \{ f : \{1,\dots,n\} \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \{1,\dots,n\}$ bijektiv $\}$

↑ Symmetrien einer Menge X mit n ~~Punkten~~ Elementen.

<u>Zykel</u> in S_n ist eine Permutation geschrieben als $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1$ und der Rest fix. Schreibe: $(i_1\, i_2 \dots i_k)$ <u>"Zykelschreibweise"</u>

k ↑ <u>Länge</u> des Zykels

$\boxed{\text{ÜA}}$ Jedes Element in S_n ist Produkt disjunkter Zykel.

Def: Ein Zykel f hat Länge k, wenn es $x \in \{1, \dots, n\}$ gibt s.d. $x, f(x), \dots, f^k(x) = x$ die einzigen durch f bewegten Elemente sind.

Transposition := Zykel der Länge 2
↳ vertauscht genau 2 Elemente

z.B. $(3\ 5)$ ist Transposition in S_6.

__Bem.__ Wir haben gesehen: S_4 = orientierungserhaltende Symmetrien des 3-dim Würfels.

$\boxed{\text{ÜA}}$ Kann man ein anderes S_k als Symmetrien eines anderen Würfels oder anderen geometr. Objektes beschreiben?

(3) $\mathbb{Z}^2 = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{Z}\}$

$$(m,n) \cdot (m',n') := (m+m', n+n').$$

1.4 __Def.__ Seien $(G,\cdot)$, $(H,\circ)$ Gruppen.

Eine Abb $\varphi: G \to H$ ist ein __Homomorphismus__, falls $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$.

Es gilt automatisch: $\varphi(e_G) = e_H$.

Ein Homomorphismus ist ein __Isomorphismus__ von Gruppen, wenn er bijektiv ist.

Äquivalent dazu:
φ ist Isomorphismus, wenn ein $\psi: H \to G$ existiert s.d. $\varphi \circ \psi = id_H$ und $\psi \circ \varphi = id_G$.

$\exists$ Iso zwischen G und H so schreiben wir $G \cong H$ und sagen sie sind __isomorph__.

1.5 Bsp.

(1) $\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto n \cdot z$ für festes $n \in \mathbb{N}$
ist Homomorphismus und Isomorphismus
genau dann, wenn $n = 1$.

$\psi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : z \mapsto n + z$ ist <u>kein</u> Homom.

(2) $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) : t \mapsto e^t$
ist Isomorphismus mit log als inverse Abb.

(3) Für Untergruppen $H < G$ ist die Inklusions-
abb. $\iota : H \to G$ ein Homomorphismus.

= Iso auf sich selbst

Bem 1.6 Die Menge von Automorphismen
eines mathematischen Objektes bildet eine
Gruppe. (Vergl Bsp 1.1.)

z.B.: X = simpl. Objekt $\quad \mathrm{Aut}(X)$ = alle Simpliz. Selbstabb.

X = top. Raum $\quad \mathrm{Aut}(X)$ = Homöom. von X

X = $\mathbb{K}$-VR der dim = n $\quad \mathrm{Aut}(X)$ = VR-Isomorphismen $\cong GL(\mathbb{K}^n)$

X = metr. Raum $\quad \mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Isom}(X)$

X = Gruppe $\quad \mathrm{Aut}(X)$ = Gruppenisomorphismen $X = G \to G = X$

X = Menge $\quad \mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$
$n := |X|$

Das letzte Bsp. ist in gewisser Weise
"generisch". $\rightsquigarrow$ vergl. 1.7

1.7 Satz von Cayley

Jede Gruppe G ist Untergruppe einer symmetrischen Gruppe.

<u>Beweis.</u> Sei G Gruppe.

Wir betrachten $S := \mathrm{Sym}(G)$, wobei wir hier G als Menge auffassen.

Definiere eine Abbildung

$$\varphi : G \to S \text{ durch } g \mapsto f_g$$

wobei $f_g(x) := g.x \;\; \forall x \in G$ sei.

Dann gilt für alle $g, h \in G$, dass $f_g \circ f_h = f_{g \cdot h}$ (s.u.)

und somit ~~f~~ f_g eine Bijektion ist für jedes g.

Die inverse Abbildung ist $f_{g^{-1}}$.

Bleibt zz: φ ist Homomorphismus.

Daraus folgt dann, dass G UG von S ist.

Es ist $e_S = id_S$ somit ist $\varphi(e_G) = f_e = id_S$.

Weiter ist $\varphi(gh) = f_{gh}$ und daher

$$\begin{aligned}\varphi(g \cdot h)(x) &= f_{gh}(x) = (g \cdot h) \cdot x = g \cdot f_h(x) \\ &= f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x) \\ &= (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) \quad \forall g,h \in G\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

→ Darstellen / Erzeugen von Gruppen

1.8 Bsp. (Erzeugendensysteme)

Möchte man alle Elemente einer Gruppe aufschreiben, so reichen manchmal endlich viele Elemente und die Verknüpfung um das zu tun:

- S_4 wird erzeugt von $\{(12),(23),(34)\}$ und auch von $\{(12),(1234)\}$
- $\{1\}$ erzeugt $(\mathbb{Z},+)$ (aber auch $\{2,3\}$ und viele andere)
- Die leere Menge erzeugt die triviale Gruppe.

1.9 Def. Erzeugendensysteme / Erzeugnis

~~Wir schreiben $\langle S\rangle$~~

Sei G Gruppe, $S\subset G$ eine Teilmenge.

Wir schreiben $\langle S\rangle$ für die kleinste Untergruppe in G, die S enthält. Diese UG heißt die von S erzeugte Untergruppe.

S erzeugt G (ist ein Erzeugendensystem von G) wenn $\langle S\rangle = G$.

G ist endlich erzeugt, wenn es ein $S\subset G$ gibt mit $\langle S\rangle = G$ und $|S|<\infty$.

Bem. G ist von G erzeugt. D.h. jede Gruppe besitzt ein Erzeugendensystem.

1.10 Lemma: $(\mathbb{Q},+)$ ist nicht endlich erzeugt

Beweis: Sei S eine endl. Teilmenge von $\mathbb{Q}$

d.h. $S = \left\{\frac{z_1}{n_1}, \dots, \frac{z_k}{n_k}\right\}$ für $z_i, n_i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

Für Elemente $q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$q \in \langle S \rangle \Longleftrightarrow q = \frac{z}{\mathrm{kgV}(n_1, \dots, n_k)} \quad \text{für ein } z \in \mathbb{Z}.$$

Aber nicht alle $q \in \mathbb{Q}$ sind von dieser Form.

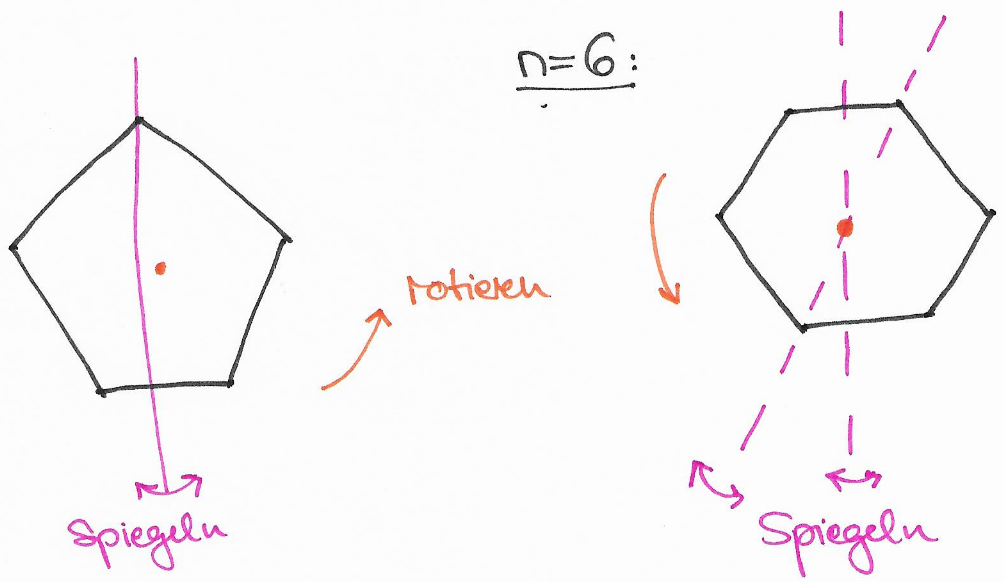
$\Rightarrow S \neq \mathbb{Q}$ $\forall$ endl. Teilmengen $S \subset \mathbb{Q}$. $\square$

1.11 Bsp. Diedergruppen

Für $n \geq 3$ definieren wir die Diedergruppe D_n als

$$\begin{aligned} D_n &:= \mathrm{Sym}(\text{reguläres } n\text{-gon}) \\ &= \{ \underbrace{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}_{\text{Isometrie}} \mid f \text{ bildet die Ecken eines regulären } n\text{-gons } P_n \text{ auf sich selbst ab.} \} \end{aligned}$$

$n=5$: $n=6$:

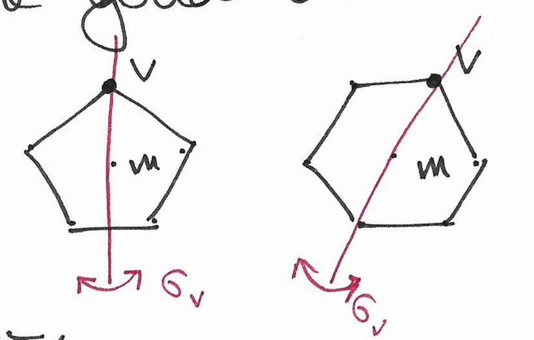


D_n hat $2n$ Elemente.

1.12 Lemma

D_n ist erzeugt von zwei Elementen.

<u>Beweis:</u> Sei P_n reguläres n-gon mit Mittelpkt m.
Eine Diagonale in P_n ist eine Gerade durch m und eine Ecke v von P_n.

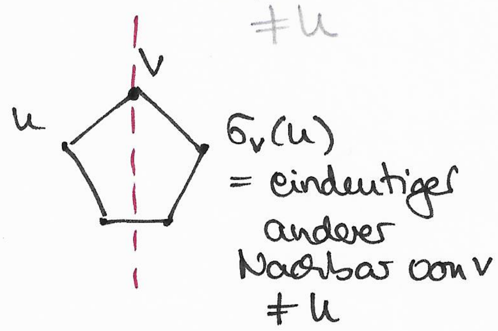


Sei σ_v Spiegelung an der Diagonale durch v.
Sei ρ Drehung von P_n um $2\pi/n$.
<u>Beh:</u> $S := \{\sigma_v, \rho\}$ erzeugt D_n.
Sei $f \in D_n$ gegeben. Dann bildet f ~~eine~~ die Ecke v von P_n auf eine Ecke $f(v)$ ab.
Es gibt dann $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(v) = \rho^k(v)$; hierbei ist $\rho^k = \underbrace{\rho \circ \ldots \circ \rho}_{k\text{-mal}}$.

Sei jetzt u ein Nachbar von v in P_n.
Wir betrachten 2 Fälle:

1. $\rho^k(u) = f(u)$:
   Dann ist $f = \rho^k$ weil $f \circ \rho^{-k}$ P_n fixiert.
2. $\rho^k(u) \neq f(u)$:
   Dann ist $\rho^k \circ \overbrace{\sigma_v(v)}^{=v} = f(v)$ und $\rho^k \circ \underbrace{\sigma_v(u)}_{\neq u} = f(u)$
   und somit $f = \rho^k \circ \sigma_v$

$\Rightarrow D_n = \langle \{\sigma, \rho\} \rangle$



□

§ Neue Gruppen aus alten

Def. 1.13

Eine Untergruppe $N < G$ heißt <u>normal</u>, wenn gilt $gng^{-1} \in N$ $\forall g \in G$ und $\forall n \in N$.
Schreibe $N \trianglelefteq G$.
Sei $R \subset G$ Teilmenge. Die <u>von R erzeugte normale UG</u> $\langle R \rangle_{\triangle}$ in G ist die kleinste UG in G, die R enthält und normal ist.

Bsp. 1.14

a) alle UG abelscher Gruppen sind normal

b) Kerne von Homomorphismen sind normal

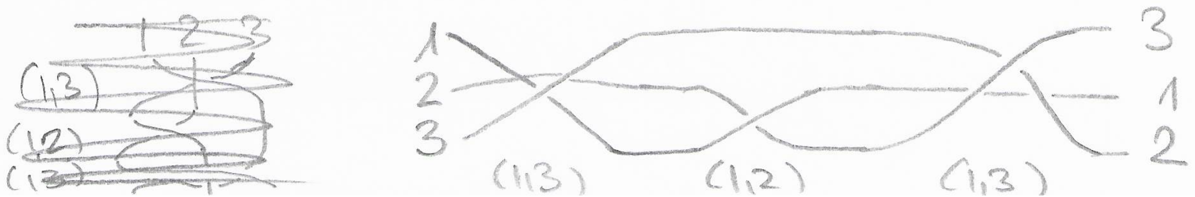
$\ker(\varphi) := \{ g \in G \mid \varphi(g) = e_H \}$

$\varphi: G \to H$ Hom. $\boxed{\text{ÜA}}$

c) $G = S_3$, $H = \langle (1,2) \rangle = \{ e, (1,2) \}$

H ist nicht normal in G.

Es reicht z.z. dass es ein $g \in G$ gibt s.d.
$g(1,2)g^{-1} \notin H$. Sei $g := (1,3) \in S_3$.
$(1,3)$ ist selbstinvers. Also $(1,3) = g = g^{-1}$.
Es ist $(1,3) \cdot (1,2) \cdot (1,3) = (3,1,2) \notin H$.



Satz 1.15 Nebenklassenkriterium

Sei G eine Gruppe und H UG in G. Dann gilt:
H normal in G $\Leftrightarrow$ $\forall g \in G$ ist $g \cdot H = H \cdot g$.
als Mengen.

Beweis: „$\Leftarrow$"

Ann $\forall g \in G$ ist $gH = Hg$. Wähle festes, bel. $g \in G$. Dann existiert $\forall h \in H$ ein $h' \in H$ so, dass gilt $gh = h'g$. Rechtsmultiplikation mit g^{-1} liefert $ghg^{-1} = h' \in H$. Also ist H normal.

„$\Rightarrow$" Sei also $\forall g \in G, h \in H$ das Element $ghg^{-1} \in H$. (H normal).

hängt von g und h ab.

Dann ist $ghg^{-1} = h'$ für ein $h' \in H$.

$\Rightarrow gh = h'g$. ~~Weil $gh \in Hg$ nach~~

Weil $h'g \in H \cdot g$ nach Def von Hg erhalten wir, dass $gh \in Hg$ $\forall g \in G, \forall h \in H$ und somit $gH \subseteq Hg$ für alle $g \in G$. Also gilt auch $g^{-1}H \subseteq Hg^{-1}$!
(weil ↑)

Es ist also $g \cdot g^{-1} H g \subseteq gH \cdot g^{-1} \cdot g$. (multipliziere auf beiden Seiten mit g) für alle $g \in G$.

Also gilt $gH = Hg$ und die Beh. folgt. $\square$

Satz 1.16 (Faktorgruppen)

Sei N UG einer Gruppe G. Dann gilt:
N ist genau dann normal in G, wenn die Menge aller Nebenklassen gN, $g \in G$, eine Gruppe bilden bzgl der Operation $gN \cdot hN = (gh) \cdot N$.
Nenne diese Gruppe G/N.

Beweis: „$\Rightarrow$" Ann. $N \triangleleft G$.

Wir müssen zeigen, dass die Verknüpfung unabhängig vom Repräsentanten der Nebenklasse ist. D.h. für $h_i \in g_i \cdot N$, $i = 1,2$, beliebig muss folgen $(g_1 \cdot g_2)N = (h_1 \cdot h_2) \cdot N$. (*)

Seien also solche h_i für zwei g_i gegeben.

Dann gilt: $(h_1 h_2)N = h_1 \cdot g_2 N$ weil $h_2 \in g_2 N$ und zwei NK sind entweder disjunkt oder gleich und selbes Argument für h_1

$= h_1 \cdot N g_2$ weil $g_2 N = N g_2$ da N normal

$= g_1 N g_2$

$= g_1 g_2 N$ & selbes Arg. für g_1

Das Produkt $g_1 N \cdot g_2 N := (g_1 g_2) \cdot N$ ist also wohldefiniert und bildet also eine Gruppe mit $\mathbb{1} \cdot N$ als neutrales Element.

„$\Leftarrow$" Ann. $\{gN, g \in G\}$ ist Gruppe.

Es gilt also Eigenschaft (*) und wir müssen zeigen, dass $N \triangleleft G$.

Es ist dann:

$$h_1 \in g_1 N\ ,\ h_2 \in g_2 N \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in (g_1 \cdot g_2) N$$

weil $\underset{e_G}{\overset{\shortparallel}{1}} \in N$ da N UG von G ist.

Anders ausgedrückt:

$\forall g_1, g_2 \in G$ und $\forall n_1, n_2 \in N$ ~~ex~~ gilt:

ist $h_1 = g_1 n_1$ und $h_2 = g_2 n_2$ dann ~~ist~~ existiert ein $w \in N$ mit $h_1 h_2 = g_1 g_2 \cdot w$.

D.h. $(g_1 n_1) \cdot (g_2 n_2) = (g_1 g_2)\, w$.

Wir kürzen g_1 von links und erhalten:

$$n_1 g_2 n_2 = g_2 w$$

also ist $n_1 g_2 = g_2 \underbrace{w n_2^{-1}}_{\in N}$.

Somit gilt $\forall n_1 \in N$:

$$n_1 g_2 \in g_2 N \quad \text{d.h.} \quad N g_2 \subseteq g_2 N.$$

Ersetzt man g_2 durch g_2^{-1} so erhält man

$$n_1 g_2^{-1} = g_2^{-1} w n_2^{-1} \quad \text{oder}$$

$$n_2 n_1 = w n_2^{-1} g_2 \quad \text{und damit } g_2 N \subseteq N g_2.$$

$\Rightarrow g_2 N = N g_2$ und N ist mit Nebenklassen-kriterium aus Satz 1.15 normal in G. $\square$

1.17 Bsp.

$G = (\mathbb{Z}, +)$ mit UG $S := 7 \cdot \mathbb{Z}$.

Die Gruppe G/S hat Elemente

$\{7\mathbb{Z}, 1+7\mathbb{Z}, 2+7\mathbb{Z}, 3+7\mathbb{Z}, 4+7\mathbb{Z}, 5+7\mathbb{Z}, 6+7\mathbb{Z}\}$.

Addition: $(3 \underset{\substack{\text{Add.}\\ \text{in } G=\mathbb{Z}}}{+} 7\mathbb{Z}) \underset{\text{Add. in } G/S = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}}{+} (5 + 7\mathbb{Z}) = 8 + 7\mathbb{Z} = 1 + 7\mathbb{Z}$.

Lemma 1.18

Sei N UG in einer Gruppe G.
Gilt $gNg^{-1} \subseteq N$ für alle $g \in G$ so ist $N \trianglelefteq G$.

Beweis:

Aus $gN = Ng \; \forall g \in G$ folgt $gNg^{-1} = N \; \forall g \in G$.

Ist jetzt ~~xxxxx~~ $gng^{-1} = n' \in N$ für $\forall n \in N$ und $\forall g \in G$ (also $gNg^{-1} \subseteq N$) so ist

$$n = g^{-1} \cdot n' \cdot g \in g^{-1} \cdot N \cdot (g^{-1})^{-1} \quad \text{für alle } n \in N \text{ und } \forall g \in G$$

und damit gilt $N \subseteq g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \; \forall g^{-1} \in G$.

Beh. folgt. $\square$

Satz 1.19

Sei $N \triangleleft G$. Dann ist $N = \ker(\varphi)$ eines Homomorphismus $\varphi: G \to H$.

Beweis Setze $H = G/N$ und $\varphi: G \to H$ sei definiert durch $g \mapsto g \cdot N$.
Das ist wohldefiniert da N normal.
Außerdem ist $N = e_H$ und $\varphi(n) = N \; \forall n \in N$.
Also ist φ Homomorphismus. $\square$

Damit lässt sich folgendes leicht zeigen:

Satz 1.20 (Isomorphiesatz)

Ist $\varphi: G \to H$ Homomorphismus. Dann gilt

$$\operatorname{Im}(\varphi) \cong G/\ker(\varphi)$$

wobei $\operatorname{Im}(\varphi) := \{h \in H \mid \exists g \in G \text{ mit } \varphi(g) = h\}$ das Bild von φ sei.

Beweis ÜA.

Satz 1.21 (universelle Eigenschaft von Faktorgruppen)

$N \triangleleft G$, dann hat G/N folgende universelle Eigenschaft bzgl. der Standardprojektion $\pi: G \to G/N$, $g \mapsto gN$

$\forall H$ Gruppe und $\forall$ Homom. $\varphi: G \to H$ mit $N \subset \ker(\varphi)$ gilt:
$\exists!$ Homom. $\overline{\varphi}: G/N \to H$ mit $\varphi \circ \pi = \overline{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

O. Sch.

Def 1.22 (Erweiterungen)

Seien Q und N Gruppen, dann nennen wir eine exakte Sequenz der Form

$$1 \to N \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \to 1$$

Erweiterung von Q durch N.

Manchmal bezeichnen wir damit auch G selbst.

(Hier ist ι injektiv, π surjektiv).

Def/Bsp. 1.23 (direkte Produkte)

Sei I eine Menge und $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen.

Das direkte Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ ist die Gruppe, die als zugrundeliegende Menge das kathesische Produkt der G_i hat und als Verknüpfung die Abbildung

$$((g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I}) \longmapsto (g_i \cdot h_i)_{i\in I}.$$

komponentenweises Verknüpfen der G_i.

Das direkte Produkt zweier Gruppen ist eine Erweiterung des zweiten Faktors durch den ersten.

⚠ Nicht jede Erweiterung ist ein direktes Produkt!

<u>Bem:</u> Ein Homom. in ein direktes Produkt entspricht einer Familie von Homom. in alle Faktoren.

<u>1.24 Def.</u> (Semidirekte Produkte)

Seien N, Q Gruppen, $\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(N)$ Homom.
Das <u>semidirekte Produkt</u> <u>von Q mit N bzgl φ</u> ist die Gruppe $N \rtimes_\varphi Q$ mit Definitionsmenge $G := N \times Q$ und Verknüpfung $G \times G \longrightarrow G$

$$((n,p),(m,q)) \longmapsto (n\underbrace{\varphi(p)}_{\in \mathrm{Aut}(N)}(m),\ pq).$$

$\boxed{\text{ÜA}}$ Spaltet eine Erweiterung von G durch N (d.h. $\exists\ s : Q \to G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$) so ist G semidirektes Produkt von Q mit N.

1.19 Bsp.

Faktorgruppen:

(1) für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Faktorgruppe.

Verknüpfung ≙ ~~[illegible]~~ Addition modulo n in $\mathbb{Z}$

(2) Die Faktorgruppe $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ ist isomorph zur Kreisgruppe $(S^1, \cdot)$ wobei wir letztere wie folgt verstehen:

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

und Verknüpfung ≙ Multiplikation in $\mathbb{C}$

semidirektes Produkt:

(3) Die Diedergruppe D_n lässt sich schreiben als semidirektes Produkt:

$$D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

wobei $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ gegeben ist durch die Multiplikation mit -1.

Bem: $\rho =$ Drehg um $2\pi/n$ $\longmapsto$ Erzeuger 1 in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\sigma =$ Spiegelg $\longmapsto$ —"— in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Wir können auch definieren:

$$D_\infty := \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad , \varphi \text{ wie oben.}$$

Dann ist $D_\infty \cong \mathrm{Isom}(\mathbb{Z})$ und entspricht den Symmetrien folgendes Simplizialkomplexes:

erzeugt durch Shift um 1 und Spiegelg