Thema der Woche 2:

$\boxed{\text{Räume aus Gruppen und}}$

- bereits gesehen: Gruppen kann man als Symmetrien auffassen
- wir werden das Konzept allgemeiner fassen und Gruppenwirkungen betrachten ⇝ präzisieren der Idee, dass eine Gruppe Symmetrienmenge ist

2. Räume

<u>Bsp.</u> für Räume (später genauer):

Graphen, metr. Räume, Vektorräume, Simplizialkplxe, Mfkten, top. Räume, ...

<u>Def. 2.1</u> <u>Gruppenwirkungen</u> (-operationen)

Sei G eine Gruppe und X ein Objekt*/Raum. Eine <u>Wirkung von G auf X</u> ist ein Homomorphismus (von Gruppen) $\rho : G \to \mathrm{Aut}(X) := \left\{ \begin{matrix} \text{Automorph.} \\ \text{von } X \text{ (in } \mathcal{C}) \end{matrix} \right\}$

Wir schreiben kurz $G \underset{\rho}{\curvearrowright} X$ oder nur $G \curvearrowright X$.

* in einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$, d.h. $\mathrm{Mor}(X,Y)$ ist Menge für alle $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

Bem 2.2

1) Eine Gruppenwirkung ist also eine Familie $(f_g)_{g\in G}$ von Automorphismen von X, wobei gilt: $f_e = id_X$, $f_g \circ f_h = f_{gh}$ $\forall g,h \in G$. (*)

ÜA 2) Eine Gruppenwirkung lässt sich auch als Abbildung
$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g,x) \longmapsto g.x$$
beschreiben.

wobei $e.x = x$ $\forall x \in X$ und $(gh).x = g.(h.x)$ (*)
$\forall g,h \in G$ und $\forall x \in X$.

Bsp. 2.3

1) Jede Gruppe G besitzt auf jedem Objekt X eine (uninteressante) Wirkung:
$$G \xrightarrow{\rho} Aut(X)$$
$$g \longmapsto id_X \quad \forall g \in G$$
die trivialen Wirkung

2) $G := Aut(X) \underset{\rho}{\curvearrowright} X$ $\forall X$
via $\rho = id$.
$\rightsquigarrow$ Gruppenwirkungen sind "verallgemeinerte" Symmetrien.

3) $D_n \curvearrowright \{$ Ecken des n-gons $P_n \}$
Kanten
Diagonalen

4) Rotationswirkung auf dem Einheitskreis:

Sei θ fester Winkel.

$G := \mathbb{Z}$, $X = S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$G \curvearrowright X$ via $\quad \mathbb{Z} \times S^1 \xrightarrow{f} S^1$

$\quad (n, z) \longmapsto e^{2\pi i \theta n} \cdot z$

<u>Beweis</u>: $(0, z) \mapsto z \quad 0 = e$ in $\mathbb{Z}$

$f(n+m, z) = f(n,z) \cdot f(m,z)$. $\square$

4) Translationswirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ via $\quad (n, x) \longmapsto n + x$

<u>Bsp. 2.4</u> Gruppenwirkung auf sich selbst:

1) Links-Multiplikation: | vergl. mit S.v. Cayley!

$G \curvearrowright G$ durch $(g, h) \longmapsto gh$

1.7 Jede Gruppe ist UG einer Symm.

2) Konjugation:

$G \curvearrowright G$ durch $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$

<u>Def 2.5</u> Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ heißt

- <u>frei</u> falls $g.x \neq x$ $\forall x \in X$ und $\forall g \in G \setminus \{e\}$
  d.h. der Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$ $\forall x \in X$
  $\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid g.x = x\}$

- <u>treu</u> falls $\rho: G \to \mathrm{Aut}(X)$ injektiv ist,
  d.h. $\forall g \in G \setminus \{e\}$ $\exists x \in X$ mit $g.x \neq x$

- <u>transitiv</u> $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ wenn $\forall x \in X$ die Bahn (der Orbit) von x unter G ganz X ist.
  Schreibe: $G.x$ für die Bahn
  $\llcorner \{ y \in X \mid \exists g \in G \text{ mit } y = gx \}$

Im Bsp: 2.4.1) ist transitiv und frei und treu
2.4.2) ist im Allgemeinen weder transitiv noch frei

2.3.4) Rotationswirkung um Winkel θ ist
- frei $\Leftrightarrow$ $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- im Allgemeinen nicht treu und transitiv.

<u>Bsp.</u> Die volle Isometriegruppe wirkt transitiv aber nicht frei auf S^1.
(Spiegelungen haben Fixpunkte).

Wir definieren jetzt eine erste Klasse von Räumen auf denen wir Gruppenwirkungen betrachten werden:

Achtung: Es gibt viele sinnvolle aber <u>verschiedene</u> Definitionen von Graphen!

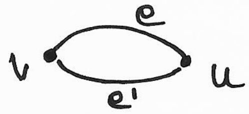
<u>Def. 2.6 Graphen</u>

Ein <u>Graph</u> Γ ist ein Tripel (V, E, δ) von disjunkten Mengen V, den <u>Ecken</u>
E, den <u>Kanten</u>
und einer Abbildung $\partial : E \to \binom{V}{2}$:=
~~Menge der 2-elem. Teilmengen von V~~ {ungeordnete Paare $\{u,v\}$ mit $u,v \in V$} möglich: $u=v$
genannt <u>Randabbildung</u>.
Wir nennen $v \in \delta(e)$ für $e \in E$ ein <u>Ende/Ecke von e</u>.

Zwei Ecken $u,v \in V$ sind <u>benachbart</u>, wenn es $e \in E$ gibt mit $\delta(e) = \{u,v\}$.

Eine <u>Schleife</u> ist eine Kante e mit $\delta(e) = \{v,v\}$ für ein $v \in V$.

Eine <u>Doppelkante</u> ist ein Paar von Kanten $e \neq e' \in E$ mit $\delta(e) = \delta(e')$.



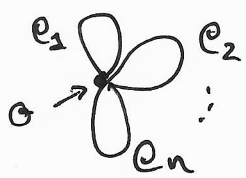
Ein Graph ist <u>einfach</u> / <u>simplizial</u>, wenn er keine Schleifen und keine Doppelkanten hat.

In einem einfachen Graphen ist der <u>Grad einer Ecke</u> v die Anzahl seiner benachbarten Ecken. (= # Kanten mit Ende v)

<u>Bem.</u> Ist Γ einfach, so können wir seine Kanten als Elemente aus $\underset{\{2\text{-elem. Teilmengen von } V\}}{\underset{\shortparallel}{V^{(2)}}}$ auffassen und δ formal weglassen. Wir schreiben dann $E \subset V^{(2)}$ und $e = \{u,v\}$ für $v \neq u$ in V.

<u>Bsp. 2.7</u>

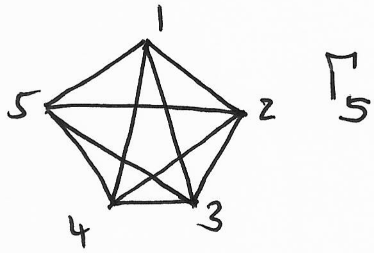
1) Rose R_n mit n Blättern ist der Graph mit $V = \{0\}$, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $\delta(e_i) = \{0,0\}$ $\forall i$



2) Der vollständige Graph auf n Ecken ist $\Gamma_n = (V, E)$ mit $V = \{1, \dots, n\}$, $E = V^{(2)}$

↑ einfach

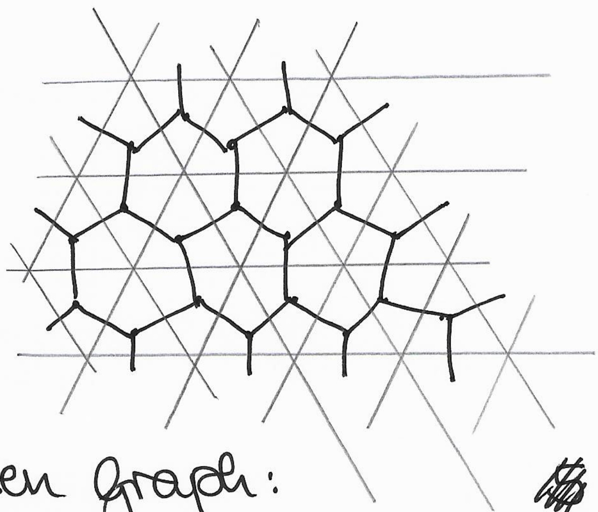
d.h. alle Ecken sind paarweise benachbart.



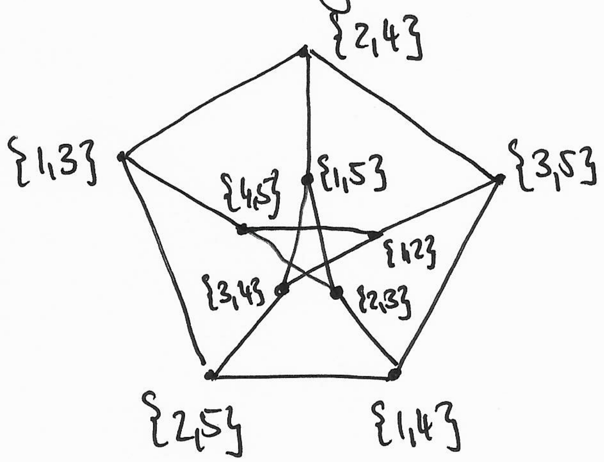
3) Die Parkettierung des $\mathbb{R}^2$ mit gleichseitigen Dreiecken liefert einen Graphen (einfach):

$V = \{\text{Dreiecke in der Ebene}\}$

E wird definiert durch: $\exists$ Kante $\{u, v\}$ genau dann, wenn sich die Dreiecke u und v eine Seite der Dimension 1 teilen.



4) Petersen Graph:

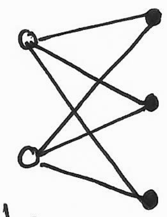


$V = \{\text{2-elementige Teilmengen von } \{1, 2, \dots, 5\}\}$

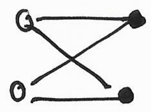
$\exists$ Kante zwischen $\{a, b\} =: v$ und $\{c, d\} =: u$ wenn $u \cap v = \emptyset$ ist.

Jede Ecke hat Valenz 3.
Grad

5) vollständig bipartiter Graph $K_{n,m}$:



$K_{2,3}$



$K_{2,2}$

formale Beschreibung: $V = V_1 \sqcup V_2$ mit $|V_1| = n$ und $|V_2| = m$ ist die Eckenmeng und es gibt eine Kante $e = \{v_1, v_2\}$ $\forall$ $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$.

Ende Vo

Für uns relevante Varianten der Def eines Graphen sind zB die folgenden:

2.8 Def.

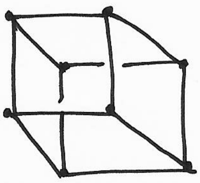
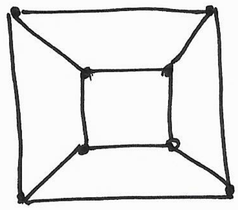
Ein <u>gerichteter Graph</u> ist ein Graph bei dem wir alle Kanten $e = \{u, v\}$ ordnen, d.h. eine der beiden Ecken von e ist die <u>Quelle</u>, z.B. u, die andere die <u>Senke</u> von e, z.B v. Dann ist e <u>Kante von u nach v</u> und wir schreiben $e = (u, v)$ ← geordnetes Paar.

z.B.  ist verschieden von  als ~~geordnete~~ gerichtete Graphen.

2.9 Def.

Ein <u>beschrifteter</u> (oder <u>kantenbeschrifteter</u>) <u>Graph</u> ist ein Graph $\Gamma = (V, E, \delta)$ mit einer Funktion $f: E \to I$ = Menge an Labels/Farben, die jeder Kante ein(e) Label / Farbe zuordnet.

Wann sind zwei Graphen gleich?

 und  sind gleich

Def. 2.10 (Iso-)Morphismen von Graphen

Seien $\Gamma = (V, E, \delta)$ und $\Gamma' = (V', E', \delta')$ zwei Graphen.
Ein <u>Morphismus</u> $f: \Gamma \to \Gamma'$ ist ein Paar von Abbildungen $f = (f_V, f_E)$ s.d. gilt:

$$\begin{matrix} f_V : V \to V' \\ f_E : E \to E' \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \delta' \circ f_E = (f_V * f_V) \circ \delta .$$

Ein Morphismus f ist <u>Isomorphismus</u> falls weiterer Morphismus f' existiert $f': \Gamma' \to \Gamma$ mit $f' \circ f = id_\Gamma$ und $f \circ f' = id_{\Gamma'}$.

ÜA: <u>Bem.</u> Iso von simpl. Graphen ist Bijektion $f: V \to V'$ s.d. $\{v, u\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(u)\} \in E'$.

Def 2.11 Pfade, Kreise

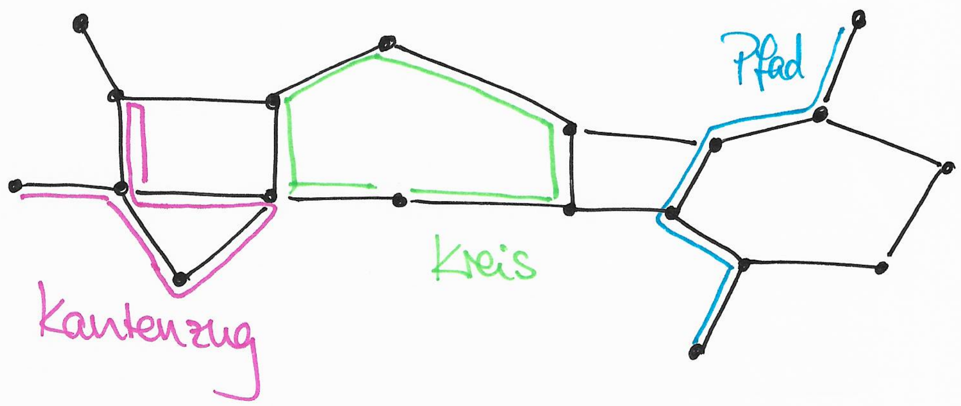
Ein Kantenzug p der Länge n in einem Graphen $\Gamma = (V, E, \delta)$ ist eine Folge $(v_0, \dots, v_n)$ von nicht-notwendigerweise verschiedenen Ecken $v_i \in V$ s.d. es Kanten e_i gibt mit $\delta(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ $\forall\, i = 1, \dots, n$.

Ein Kantenzug p ist ein Pfad, wenn alle Ecken verschieden sind.

Wir sagen p verbindet v_0 mit v_n oder läuft von v_0 nach v_n.

Ein Kreis (oder Zykel) ist ein Pfad für den zusätzlich gilt: $\exists$ Kante $e_{n+1} = e_0$ mit $\delta(e_{n+1}) = \{v_0, v_n\}$

Bsp.



Def 2.12 Bäume und Blätter

- Ein Blatt in einem Graphen ist eine Ecke vom Grad 1.
- Ein Baum ist ein simplizialer Graph ohne Kreise.

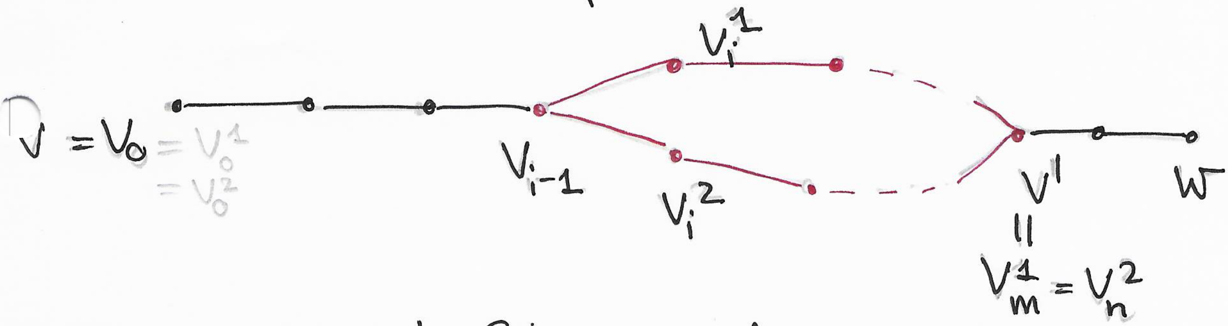
Es gibt Bäume mit und ohne Blätter.

Satz 2.13 (Charakterisierung von Bäumen)

Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ zusammenhängender, simpl. Graph mit mindestens zwei Ecken.
Dann gilt:

Γ ist genau dann ein Baum wenn $\forall$ Paare von Ecken $v, w \in V$ genau ein Pfad von v nach w existiert.

__Beweis:__ „$\Rightarrow$" ~~Ann~~ Vor.: Γ ist Baum.
Seien v, w zwei Ecken in Γ. Weil Γ zshgd ist existiert ein Pfad von v nach w, genannt p_1.
Sei p_2 ein weiterer Pfad von v nach w.
Sei i kleinster Index, so dass sich die Ecken v_i^1 und v_i^2 von p_j $j = 1, 2$ unterscheiden.



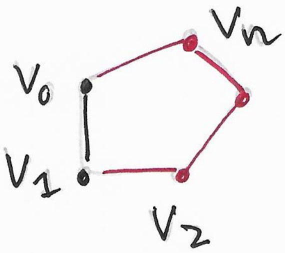
Sei weiter v' Ecke an der sich p_1 und p_2 wieder treffen.
Dann definieren die Teilpfade $(v_i^1, v_{i+1}^1, \dots, v')$ und $(v', \dots, v_{i+1}^2, v_i^2)$ einen Kreis (rot). $\lightning$

„⇐" Vor: Pfade von v nach w sind eindeutig.

Ann: $\exists$ Kreis in Γ, $C = (v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)$ $n \geq 2$ (weil Γ simplizial)

Dann sind die Pfade (v_0, v_1) und $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$ verschieden und verbinden beide v_0 mit v_1. $\lightning$ Vor.

$\square$



Bem 2.14 Gruppenwirkungen auf Graphen

Nach Def. 2.1 ist eine Wirkung $G \curvearrowright \Gamma$ = Graph ein Homomorphismus $\rho: G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Insbesondere muss also die Wirkung die Graph Struktur erhalten.

1) In Analogie zu Bem 2.2 können wir auch hier ρ als Familie von Automorphismen von Γ auffassen. Dann haben wir:

$$(f_g)_{g \in G}, \quad \text{wobei } f_g = (f_g^V, f_g^E)$$

mit $f_g^V : V \to V$ und $f_g^E : E \to E$

wobei beide $(*)$ in 2.2 1) erfüllen.

$f_e^* = id_*$

$f_g \circ f_h = f_{gh}$

Weiter muss gelten:

Ist $\delta(e) = \{u, v\}$, so ist $\delta(f_g^E(e)) = \{f_g^V(u), f_g^V(v)\}$

2) Als Abbildung geschrieben gilt:

$\rho_V: G\times V \longrightarrow V$ und $\rho_E: G\times E \longrightarrow E$

$(g,v) \overset{\rho_V}{\longmapsto} g.v = \rho_V(v)$ $\quad (g,e) \overset{\rho_E}{\longmapsto} g.e = \rho_E(e)$

wobei (*) aus 2.2.2) für beide gelte.

Zusätzlich gilt: $\delta(\rho_E(e)) = \{\rho_V(u), \rho_V(v)\}$

falls $\partial(e) = \{u,v\}$ für Kante $e \in E$.

3) Eine Wirkung auf einem Graphen $\Gamma = (V,E,\delta)$ ist frei, wenn ρ_E und ρ_V frei sind, d.h. wenn $\forall g \in G\setminus\{\mathbb{1}\}$ gilt:

(i) $\forall v \in V$ ist $(\rho_V(g))(v) \neq v$ — ρ_V ist fixpunktfrei

und — und

(ii) $\forall e \in E$ ist $(\rho_E(g))(e) \neq e$ — ρ_E ist inversionsfrei

Wir kommen jetzt zum ersten zentralen Konzept: Cayleygraphen

Def 2.15 **Cayleygraphen**

Sei G eine Gruppe und $S \subset G$ ein Erzeugendensyst. sei $e \notin S$

a) Der (**ungerichtete**) **Cayleygraph** von G bzgl S ist der Graph $Cay(G,S)$ mit Eckenmenge $V = G$ und Kantenmenge $\{\{g,gs\} \mid g \in G, s \in S\}$.

Wir können (optional) die Kanten in $Cay(G,S)$ mit dem jeweiligen $s \in S$ beschriften.

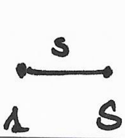
b) Der **gerichtete Cayleygraph** von G bzgl S ist der gerichtete, kantenbeschriftete Graph $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ mit Eckenmenge $V = G$ und gerichteten Kanten (g,gs) von g nach gs $\forall g \in G, s \in S$.

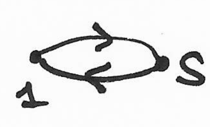
Beschrifte die Kante (g,gs) mit s.

Bem 1) Sind S, S' verschieden, so sind i.A. $Cay(G,S)$ und $Cay(G,S')$ aber auch $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ und $\overrightarrow{Cay}(G,S')$ verschieden.

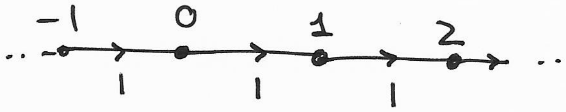
2) $Cay(G,S)$ ist nicht immer $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ mit "vergessener Kantenorientierung".

z.B. $G = \{1, s\}$ mit $s \cdot s = 1$. $S = \{s\}$.

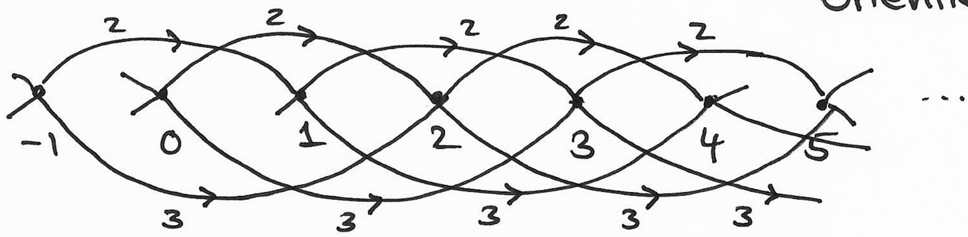
$Cay(G,S) =$ 

$\overrightarrow{Cay}(G,S) =$ 

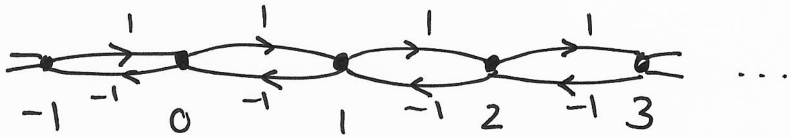
Bsp 2.16

1) $\overrightarrow{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$  $\hat{=}$ $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$ mit vergessener Orientierung

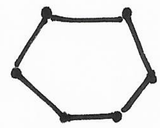
$\overrightarrow{Cay}(\mathbb{Z}, \{2,3\})$

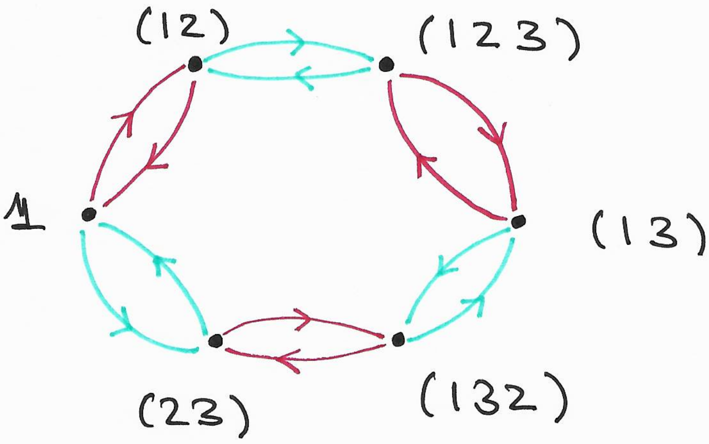


$\overrightarrow{Cay}(\mathbb{Z}, \{1,-1\})$



Doppelkanten!

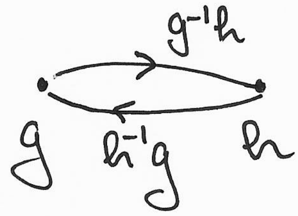
2) $\overrightarrow{Cay}(S_3, \{(12), (23)\})$ $\qquad$ $Cay(S_3, \{\ldots\}) =$ 



∃ gleichfarbige Doppelkanten!

kommen von selbst-inversen Elementen

3) $\overrightarrow{Cay}(G, G \setminus \{1\})$ ist doppelt vollständiger Graph auf $\#G$ Ecken. Mit Kanten der Form



für alle $g, h \in G$.

$Cay(G, G \setminus \{1\})$ ist vollständiger Graph auf $\#G$ Ecken.

2.18 Eigenschaften von Cay(G,S) (Bew. ÜA)

1) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ ist zusammenhängend.
2) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist regulär, d.h. jede Ecke hat den gleichen Grad.
3) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ ist lokal endlich, genau dann wenn S endlich ist.
4) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ besitzt keine Schleifen
5) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ besitzt Doppelkanten genau dann, wenn $\exists s \in S$ mit $s^{-1} \in S$.
6) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist ~~kombinatorisch~~ simplizial g.d.w. $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

2.19 Bsp. G-Wirkg auf $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$.

Die Linksmultipl. von G auf sich selbst induziert eine Wirkung von G auf $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ durch:

$$f_g^V : V \to V \quad : \quad v \mapsto gv$$

$$f_g^E : E \to E \quad : \quad (u,v) \longmapsto (gu, gv)$$

mit $v = u \cdot s$, $s \in S$

$\boxed{\text{Links-translation von } G \text{ auf } \overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)}$

dies ist wohldefiniert, weil $f_g^V(u) = gu$ und $f_g^V(us) = gus = gv$.

2.20 Satz

Die G-Wirkung $\rho : G \to Aut(\overrightarrow{Cay}(G,S))$ auf $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist Isomorphismus von Gruppen für alle Erzeugendensysteme S von G.

d.h. G ist Symmetriegruppe von $Cay(G,S)$. Bew. später.

2.21 Satz

Sei G von S erzeugt, $\mathbb{1} \notin S$.
Die Linkstranslationswirkung von G auf $Cay(G,S)$ ist genau dann frei, wenn S keine Elemente der Ordnung 2 enthält.

$\uparrow$ $\mathrm{ord}(g) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n = \mathbb{1}\}$.

Frage (ÜA): wie verhält es sich mit der Linkstransl.wirkg auf $\overrightarrow{Cay}(G,S)$?

Beweis „$\Rightarrow$“ Sei $s \in S$ von Ordnung 2. Dann fixiert s die Kante $\{\mathbb{1}, s\}$ in $Cay(G,S)$. ↯

„$\Leftarrow$“ Seien ρ_V und ρ_E die induzierten Wirkungen auf V bzw E in $Cay(G,S)$.
Dann ist ρ_V fixpktfrei, da Linkstranslation gerade der Linksmultiplikation in $G = V$ entspricht.
Bleibt z.z. ρ_E ist inversionsfrei.

Ann $\exists\, e \in E$ mit $(\underbrace{\rho_E(g)}_{=: L_g})(e) = e$
und $g \in G$

Insbes. ist dann $L_g(\partial(e)) = \partial(L_g(e)) = \partial(e)$.

Mit $\partial(e) = \{v, v'\}$ folgt: $\{v, v'\} = \{gv, gv'\}$
und $v' = vs$ für ein $s \in S$.

Ist 1. $gv = v$ so auch $gv' = v'$ und $g = \mathbb{1}$ weil ρ_V fixpunktfrei wirkt und $Cay(G,S)$ keine Doppelkanten hat, da in S kein s mit $s^2 = \mathbb{1}$ ist.

Ist <u>2. $gv = v'$</u> so ist $gv' = v$ womit gilt:

$$v = gv' = g(vs) = (gv)s = v's = v \cdot s^2$$

$\Rightarrow s^2 = 1$ (weil S_v fixpktfrei wirkt auf V) ↯

Somit ist S_E inversionsfrei und die Beh. folgt. □

3. Freie Gruppen

TdW3 $\boxed{\text{Freie Gruppen: Definition und Eigenschaften}}$

Def 3.1 (reduzierte Wörter)
Sei A eine bel. Menge. Ein <u>Wort</u> w in A ist eine endliche Folge von Elementen aus A. D.h.

$$w = y_1 \dots y_n \quad , y_i \in A.$$

Definiere $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ Menge formaler Inversen der Elemente in A und nenne $A^{\pm} := A \sqcup A^{-1}$ ein <u>Alphabet</u>.
Ausdrücke der Form $w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n} \quad y_i \in A, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$
sind Wörter in $A^{\pm}$ (wobei $y_i^{+1} := y_i$).
Ein solches Wort heißt <u>reduziert</u>, falls es kein Teilwort der Form aa^{-1} bzw $a^{-1}a$ enthält.
Wir nennen n die <u>Länge von w</u> und schreiben $|w|$.

Bem. Ist A bereits Teilmenge einer Gruppe, so setzen wir $A^{-1} := \{\underset{\uparrow \text{ inverses in } G}{a^{-1}} \mid a \in A\}$.

Def. 3.2 Eine Gruppe G ist <u>frei</u>, wenn es ein Erzeugendensystem S in G gibt so, dass jedes nicht-leere reduzierte Wort in $S^{\pm}$ ein nicht-triviales (!) Element in G definiert.

Bem:

Wir sagen dann: G ist frei von S erzeugt.
Und S heißt freie Basis von G.

~~Konstruktion~~

Def. 3.3 reduzierte Form eines Wortes

Sei $w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$ ein Wort in $A^{\pm}$.
Ein elementarer Reduktionsschritt von w besteht aus dem Löschen eines Teilwortes der Form $a \cdot a^{-1}$, $a \in A^{\pm}$, aus w.

Bsp. $uyy^{-1}u \to uu$

Eine Reduktion von w ist eine Folge elementarer Reduktionsschritte

$$w \to w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_n$$

so dass w_n ein reduziertes Wort ist.

Wir nennen w_n reduzierte Form von w und schreiben $\overline{w}$.

Le 3.4 Seien $w \to w_1$ und $w \to w_2$ elementare Reduktionsschritte von w. Dann existieren elementare Reduktionsschritte $w_i \to w_0$, $i=1,2$ s.d. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & w_2 \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

oder $w_1 = w_2$.

d.h. elementare Red. Schritte kommutieren.