3. Freie Gruppen

TdW3 $\boxed{\text{Freie Gruppen: Definition und Eigenschaften}}$

Def 3.1 (reduzierte Wörter)

Sei A eine bel. Menge. Ein Wort w in A ist eine endliche Folge von Elementen aus A. D.h.

$$w = y_1 \dots y_n \quad , y_i \in A .$$

Definiere $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ Menge formaler Inversen der Elemente in A und nenne $A^{\pm} := A \sqcup A^{-1}$ ein Alphabet.

Ausdrücke der Form $w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$ $\quad y_i \in A, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ sind Wörter in $A^{\pm}$ (wobei $y_i^{+1} := y_i$).

Ein solches Wort heißt reduziert, falls es kein Teilwort der Form aa^{-1} bzw $a^{-1}a$ enthält.

Wir nennen n die Länge von w und schreiben $|w|$.

Bem. Ist A bereits Teilmenge einer Gruppe, so setzen wir $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$.

inverses in G

Def. 3.2 Eine Gruppe G ist frei, wenn es ein Erzeugendensystem S in G gibt so, dass jedes nicht-leere reduzierte Wort in $S^{\pm}$ ein nicht-triviales (!) Element in G definiert.

Bem:

Wir sagen dann: G ist <u>frei von S erzeugt</u>.
Und S heißt <u>freie Basis</u> von G.

~~Konstruktion~~

<u>Def. 3.3</u> reduzierte Form eines Wortes

Sei $w = y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n}$ ein Wort in $A^{\pm}$.
Ein <u>elementarer Reduktionsschritt</u> von w besteht aus dem Löschen eines Teilwortes der Form $a \cdot a^{-1}$, $a \in A^{\pm}$, aus w.

Bsp. $u y y^{-1} u \to uu$

Eine <u>Reduktion von w</u> ist eine ~~Folge~~ elementarer Reduktions-schritte

$$w \to w_1 \to w_2 \to \dots \to w_n$$

so dass w_n ein reduziertes Wort ist.

Wir nennen w_n <u>reduzierte Form</u> von w und schreiben $\overline{w}$.

<u>Le 3.4</u> Seien $w \to w_1$ und $w \to w_2$ elementare Reduktionsschritte von w. Dann existieren elementare Reduktionsschritte $w_i \to w_0$, $i = 1,2$ s.d. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & w_2 \arrow[dl] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

oder $w_1 = w_2$.

d.h. elementare Red. Schritte kommutieren.

<u>Beweis:</u> Seien $\lambda_1 : w \to w_1$ und $\lambda_2 : w \to w_2$ die elementaren Red. Schr.
Es gibt zwei Fälle:

1. Disjunkte Red.schritte: Es gilt hier
$$w = u_1 (y_1 y_1^{-1}) u_2 (y_2 y_2^{-1}) u_3$$ mit u_i Wörtern in $A^{\pm}$
und $y_i \in A^{\pm}$. Hier bezeichnet λ_i Löschung des Wortes $y_i y_i^{-1}$.
Dann ist $\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ \lambda_1$ und w_0 das Wort $u_1 u_2 u_3$.

2. Überlappende Red.schritte: Es gilt hier
~~entweder~~ $y_1 = y_2$ und $w = u_1 (y_1 (y_1^{-1}) y_2) u_2$.
Dann ist $$w = u_1 y_1 \underbrace{y_1^{-1} y_2}_{\text{wird gelöscht}} u_2 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y_1 u_2$$
$$\| \text{ weil } y_1 = y_2$$
und $$w = u_1 \underbrace{y_1 y_1^{-1}}_{\text{wird gelöscht}} y_2 u_2 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 y_2 u_2$$
d.h. $w_1 = w_2 = w_0$. $\square$

<u>Le. 3.5</u> Sei w Wort in $A^{\pm}$, dann besitzt w eine eindeutige reduzierte Form.

<u>Beweis:</u> mit Induktion über $|w|$ = Länge von w.
- Ist $|w| = 0$, so ist w das leere Wort, also ist w reduziert.

Sei jetzt $|w| > 1$ und seien

$$w \xrightarrow{\lambda_1} w_1' \to \dots \to w_n'$$
$$w \xrightarrow[\lambda_2]{} w_1'' \to \dots \to w_m''$$

zwei Reduktionen.

Dann gilt mit Le 3.4:

$$\begin{tikzcd}
& w \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\
w_1' \arrow[dr, "\lambda_2"'] \arrow[dd] & & w_1'' \arrow[dl, "\lambda_1"] \arrow[dd] \\
& w_1 \arrow[d] & \\
w_2' \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & w_2'' \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & w_k & \vdots \arrow[d] \\
w_n' & & w_m''
\end{tikzcd}$$

Sei nun

$w_1 \to w_2 \to \dots \to w_k$

Reduktion von w_1.

Diese ist nach Ind. Hyp. eindeutig, weil $|w_1| < |w|$.

Es ist nach Ind. Hyp. aber auch die Reduktion von w_1' und die von w_1'' eindeutig.

$\Rightarrow w_n' = w_k$ und $w_k = w_m''$ $\Rightarrow w_n' = w_m''$

und insbes. ist $n = m$.

$\square$

Def. 3.6 Konstruktion einer freien Gruppe.

Sei A eine beliebige Menge.

Sei $A^{-1} := \{$formale Inversen$\}$

manchmal sagen wir nur Wörter in A meinen aber $A^{\pm}$

Setze $F(A) := F_{|A|} := \left\{ \begin{array}{l} \text{reduzierte} \\ \text{Wörter in } A^{\pm} \end{array} \right\}$ = freie Gruppe über A

und definiere eine Verknüpfung

$w \cdot u :=$ Hintereinanderschreiben + Reduktion

$=$ reduzierte Form von wu.

$= \overline{wu}$.

Satz 3.7

Für eine bel. Menge A ist $F(A)$ eine Gruppe bzgl. „$\cdot$" und $F(A)$ ist frei durch A erzeugt.

Bew. Klar nach Konstr. 3.6 und Def von „frei". $\square$

Satz 3.8 (universelle Eigenschaft)

Universelle Eigenschaft (UE)

F Gruppe mit ES $A \subset F$. Dann ist F frei von A erzeugt, genau dann, wenn gilt:

Jede Abb. $\phi: A \to G$ = Gruppe erweitert zu einem eindeutigen Homomorphismus $\tilde{\phi}: F \to G$ s.d. folgendes Diagramm kommutiert:

Inklusion von A nach F

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & F \arrow[d, "\tilde{\phi}\,!"] \\ & G \end{tikzcd}$$

<u>Beweis:</u> „⇒" Sei F frei von A erzeugt.
Sei weiter $\phi : A \to G$ Abbildung. Jedes $g \in F$ ist reduziertes Wort in $A^{\pm}$. Sei also

$$g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n} \qquad s_j \in A\ ,\ \varepsilon_i \in \{1,-1\}\ .$$

Definiere $$\tilde{\phi}(g) := (\phi(s_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot (\phi(s_{i_n}))^{\varepsilon_n} \quad (*).$$

Dann ist leicht nachzurechnen, dass $\tilde{\phi}$ tatsächlich Homomorphismus ist. $\boxed{\text{ÜA}}$
Außerdem ist $\tilde{\phi}$ gerade so definiert, dass das Diagramm kommutiert.

Da aber jedes Homom. für den das Diagr. kommutiert die Gleichheit in $(*)$ erfüllen muss, ist $\tilde{\phi}$ eindeutig.

„⇐" Sei jetzt F Gruppe, die die univ. Eigenschaft erfüllt bzgl. einem ES A.
Sei $G := F(A)$ freie Gruppe über A.
<u>z.z.</u> $G \cong F$.
Wir definieren eine Abb. $\phi : A \longrightarrow G$ durch $\phi(a) = a$ für alle $a \in A$. Durch die univ. Eigenschaft erweitert ϕ eindeutig zu einem Homom. $\tilde{\phi} : F \longrightarrow G = F(S)$.

Sei w nicht-leeres, reduziertes Wort in A.
Dann definiert w ein $g \in F$ mit $\tilde{\phi}(g) = w \in G$.

insbes. ist $\tilde{\phi}(g) \neq 1$ und somit $\ker(\tilde{\phi}) = 1\!\!1$.
Klar, dass $\tilde{\phi}$ surjektiv ist. $\Rightarrow$ Beh. $\square$

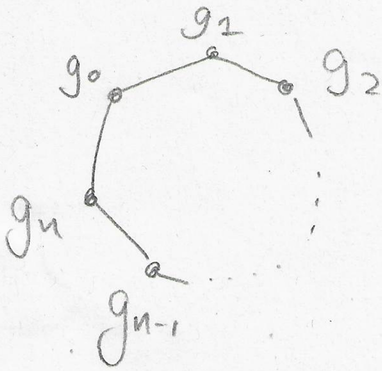
~~Bem. Man kann leicht sehen, dass~~
~~$F(A) \cong F(B) \iff |A| = |B|$~~ ~~ÜA~~

3.9 Satz (Cayleygraphen freier Gruppen)

Sei G frei erzeugt von S. (d.h. $G \cong F_S$)
Dann ist $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ein Baum.

Beweis: Als Menge ist G die Menge aller reduzierten Wörter in S.
Weil S die Gruppe G frei erzeugt ist $e \notin S$.
$\Rightarrow \quad \Gamma := \overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist zushgd und schleifenfrei

Ann: $\exists$ Kreis in Γ, ($\rightsquigarrow$ vergl Def 2.11 für Kreis)
d.h. $\exists\, g_0, g_1, \dots, g_n$ s.d. Kanten e_i $i = 0, \dots, n$ existieren mit $\partial(e_i) = \{g_i, g_{i+1}\}$ $\forall\, i = 0, \dots, n-1$
und $\partial(e_n) = \{g_n, g_0\}$.



Setze $s_0 := g_0^{-1} g_1$
$s_j := g_j^{-1} g_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, n-1$
$s_n := g_n^{-1} g_0$

$\Rightarrow s_i \in S \cup S^{-1}$ (nach Def von $\overrightarrow{Cay}(G,S)$).

Bem. Das Wort $s_0 \cdots s_n$ ist reduziert.

Bew. Wäre das Wort nicht reduziert und z.B. $s_0 = s_1^{-1}$, dann ist $g_0^{-1} g_1 = g_2^{-1} g_1$ und somit $g_0 = g_2$

also a)  $g_0 = g_1 = g_2$ oder b)  g_0 g_1

$\Rightarrow$ a) $s_0 = s_1 = e$ oder b) $e_0 \neq e_2$ und es existiert ein $s \in S$ mit $s^{-1} \in S$ ↯ zu G frei von S erzeugt. (vergl. Abgabeblatt)

□

Bem (ÜA)

a) $s, s^{-1} \in S \Rightarrow S$ ist kein freies EZS.

b) $e \in S \Rightarrow S$ ist kein freies EZS.

Satz 3.10 (~~fast~~ Umkehrung von 3.9)

G Gruppe, S Erz.syst. ~~mit $s \cdot t \neq e \ \forall s,t \in S$~~.
Ist $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ein (gerichteter) Baum, dann ist S freies Erz.syst. und G ist frei.

Def 3.11 Ein Erzeugendensystem S für das gilt: $s \cdot t \neq e \ \forall s,t \in S$ heißt reduziert.

Bew. 3.10

Es genügt z.z., dass $G \cong F_S$.

Aus der (UE) von freien Gruppen erhalten wir einen Homom. $\varphi : F_S \to G$ mit $\varphi|_S = id$.

G ist von S erzeugt, also ist φ surjektiv.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "id"] \arrow[d] & G \\ F_S \arrow[ur, dashed, "\exists ! \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ann: φ sei nicht injektiv.

Sei $s_1 \cdots s_n$ reduziertes Wort in F_S mit $s_i \in S \cup S^{-1}$ und $\varphi(s_1 \dots s_n) = e \in G$.

$\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist Baum $\Rightarrow$

$\nexists$ Schleifen $\Rightarrow e \notin S$

$\nexists$ Doppelkanten $\Rightarrow \forall s \in S$ ist $s^{-1} \notin S$

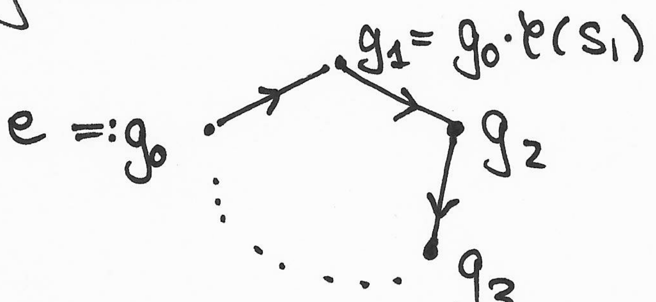
Somit ist $\forall s,t \in S$ $s \cdot t \neq e$. (ein solches EZS S heißt reduziert)

Da $\varphi|_S$ injektiv und $e \notin S$ ist $n > 2$

~~$n \geq 2$~~ für das Wort $s_1 \cdots s_n$ von oben.

~~1. Fall: $n=2$: dann ist $e = \varphi(s_1 s_2) = \varphi(s_1)\varphi(s_2) = s_1 s_2$ ↯ zu S reduziert.~~

2. Fall: $n > 2$: Das Wort $s_1 \cdots s_n$ definiert einen geschlossenen Pfad in $\overrightarrow{Cay}(G,S)$:

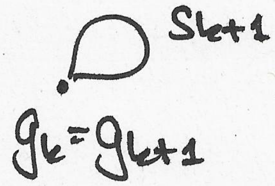


setze $g_0 := e$ und $g_k := g_{k-1}\varphi(s_k)$ $\forall k = 1 \dots n$

Es ist $g_n = g_{n-1}\varphi(s_n) = \varphi(s_1 \dots s_n) = e = g_0$

Ist ~~dieser~~ Weg ein Kreis sind wir fertig.

Andernfalls gibt es $k \neq l \pmod{n}$ mit $k<l$ und $g_k = g_l$.

(i) $k = l+1$:  $\exists$ Schleife ↯ $e \notin S$

(ii) $l = k+2$: so ist $g_k = g_{k+2}$ 

und $g_k = g_k \varphi(s_{k+1} s_{k+2})$

$\Rightarrow s_{k+1} \cdot s_{k+2} = e$ ↯ S reduziert

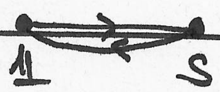
(iii) $l > k+2$: Dann ist

$$g_k = g_l = g_{l-1}\varphi(s_l) = \dots = g_k \varphi(\underbrace{s_k s_{k+1} \cdots s_l}_{\text{Wort der Länge } l-k<n})$$

dann können wir $s_1 \dots s_n$ ersetzen durch $s_k \dots s_l$ und erhalten induktiv einen Kreis oder wieder Fälle (i) und (ii). ↯

$\Rightarrow \varphi$ ist injektiv und somit S freies EZS für G. □

~~Bsp. $G = \{1, s\}$ mit $s \cdot s = 1$.~~

~~Dann ist $Cay(G, S) =$~~ 

3.12 Satz (Charakterisierung freier Gruppen via Wirkung auf Bäumen)

Eine Gruppe ist genau dann frei, wenn sie frei auf einem Baum wirkt.

Beweis „$\Rightarrow$" Ist G frei von S erzeugt, so ist $\overrightarrow{Cay}(G,S) =: T$ nach Satz 3.9 ein Baum auf dem G wirkt. Um zu sehen, dass die ~~Dann ist aber~~ Wirkung $G \curvearrowright T$ frei ist genügt es zu zeigen, dass S keine Elemente der Ordng 2 besitzt (mit 2.21).

(Beachte, dass hier $\overrightarrow{Cay}(G,S) = Cay(G,S)$ mit vergessener Orientierg.)

Ann $\exists\, s \in S$ mit $s^2 = 1$.

Betrachte $\varphi : S \to (\mathbb{Z},+)$ mit $\varphi(s) = \varphi(s^{-1}) = 1$.

Aus UE erhalten wir $\bar\varphi$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\mathbb{Z},+) \\ G \arrow[ur, dashed, "\bar\varphi\ \text{Homom.}"'] & \end{tikzcd}$$

insbes. gilt: $0 = \bar\varphi(\underbrace{s \cdot s^{-1}}_{= 1 \text{ in } G}) = \bar\varphi(s) + \bar\varphi(s^{-1}) = 2$ $\lightning$

„$\Leftarrow$" um diesen Teil zu zeigen benötigen wir Hilfsmittel.

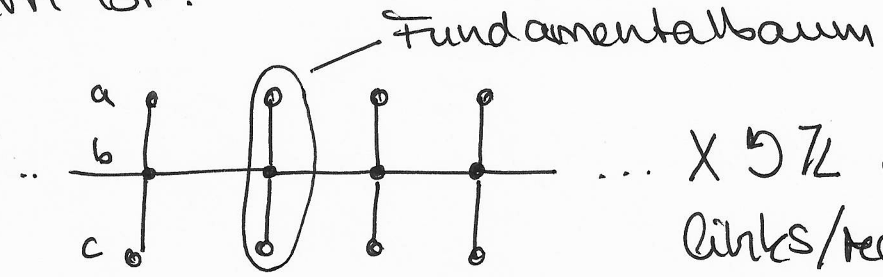
~~Ziel ist es zu zeigen, dass G frei auf einem Cayleygraphen wirkt~~.

~~Dann wende Satz~~

Def. 3.13 G Gruppe, $G \curvearrowright X = (V,E)$ zshgdes simpl. Graph.

Ein Fundamentalbaum für diese Wirkung ist ein Unterbaum von X, der genau eine Ecke aus jeder G-Bahn in V enthält.
Ein Untergraph eines Graphen (V,E) ist dabei ein Graph (V',E') mit $V' \subset V$ und $E' \subseteq E$.
Ein Unterbaum ist ein Untergraph, der ein Baum ist.

Bsp.



$X \curvearrowleft \mathbb{Z}$ durch links/rechts Translation

a, b, c sind Repräsentanten der 3 (disj.) Bahnen in V

Satz 3.13 Existenz von Fundamentalbäumen

Jede Wirkung auf einem nicht-leeren, zshgden, simplizialen Graphen besitzt einen Fundamentalbaum.

Beweis: Sei G Gruppe, die auf einem solchen Graphen X wirkt. Sei $T_G = \{$ nicht-leere Unterbäume in X, die aus jeder Bahn höchstens eine Ecke enthalten $\}$

- $T_G \neq \emptyset$ weil zB jede Ecke in T_G ist.
- T_G ist partiell geordnete durch die Teilbaum-Relation. D.h. für $T, T' \in T_G$ ist $T < T'$, wenn T Unterbaum von T' ist.

Jede totalgeordnete Kette in T_G hat eine obere Schranke (= Vereinigun alles Elemente in der Kette).

Mit Zornschem Lemma folgt, dass mindestens ein max. Element $T_0 \neq \emptyset$ in T_G existiert.

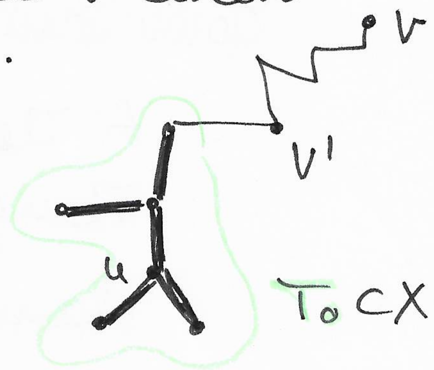
<u>Z.z.</u> T_0 ist Fundamentalbaum für $G \curvearrowright X$

<u>Ann</u> T_0 kein —"—

Dann existiert Ecke $v \in V$ s.d. $\overbrace{V(T_0)}^{\text{Ecken von } T_0} \cap G.v = \emptyset$.

<u>Beh 1</u> Wir können annehmen, dass v einen Nachbarn v'' in T_0 besitzt.

<u>Bew 1</u>: Wähle feste Ecke u in T_0 und Pfad $p: u \rightsquigarrow v$ in X.
Sei v' erste Ecke auf p, die nicht in T_0 ist.



<u>1. Fall</u> $G.v' \cap V(T_0) = \emptyset$

$\rightsquigarrow$ ersetze v durch v', weil dieses die gesuchte Eigenschaft hat.

<u>2. Fall</u> $\exists g \in G$ mit $g.v'$ ist Ecke von T_0.

Betrachte Teilpfad $p': v' \rightsquigarrow v$.
Dessen Bild $g.p': gv' \rightsquigarrow gv$ verbindet eine Ecke gv' von T_0 mit $gv \in G.v$, die nicht in T_0 liegt (weil $V(T_0) \cap G.v = \emptyset$).
Der Pfad p' ist kürzer als p
$\rightsquigarrow$ iteriere den Prozess und finde schließlich eine Ecke mit der gesuchten Eigenschaft. $\square$ Beh 1

Wir haben also $v \notin T_0$, $V(T_0) \cap G.v = \emptyset$
und $\exists$ Kante e, $\partial(e) = \{v, v''\}$, $v'' \in T_0$

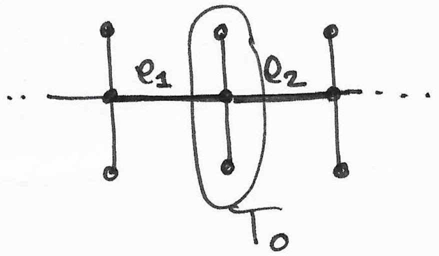
Füge dann die Kante e zu T_0 hinzu.
Der so entstandene Baum T_0' ist in T_G und hat T_0 als echten Unterbaum. Also $T_0 < T_0'$ ↯ T_0 maximal in T_G

$\Rightarrow$ T_0 ist Fundamentalbaum. $\square$

Def 3.15 (?) ⇝ 3.11 altes Skript

Sei T wie in 3.12, $G \curvearrowright T$ frei, T_0 Fundamentalbaum.
Eine Kante e in T heißt wesentlich, wenn $e \notin E(T_0)$ aber $\partial(e) \cap V(T_0) \neq \emptyset$.

Bsp.



e_1, e_2 wesentlich

Wir können jetzt „$\Leftarrow$" von 3.12 beweisen:

$G \curvearrowright T$ frei. Dann existiert nach 3.14 ein Fundamentalbaum T_0 für diese Wirkung

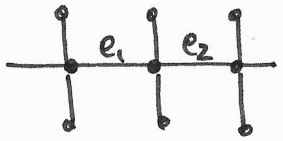
Idee: Wir "schrumpfen" jede Kopie von T_0 unter der G-Wirkung auf eine Ecke:

Sei also e wesentl. Kante von T, $e = \{u, v\}$ mit $u \in T_0$, $v \notin T_0$.
Weil T_0 Fund.baum ist existiert $g_e \in G$ mit $g_e^{-1} v$ Ecke von T_0 ($\Leftrightarrow$ v Ecke von $g T_0$).
Es ist g_e eindeutig, weil $G.v$ den Baum T_0 in genau einer Ecke trifft und $G \curvearrowright T$ frei ist.

<u>1. Schritt</u>: Kandidat für Erz.syst.

Setze $\tilde{S} := \{ g_e \text{ in } G \mid e \text{ ist wesentl. Kante von } T \text{ bzgl } T_0 \}$

<u>z.B.</u>



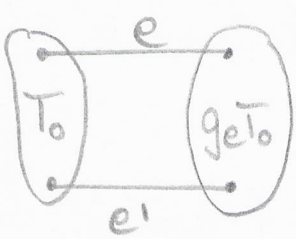
$g_{e_1} = -1 \, , \, g_{e_2} = +1$

Es gilt: (i) $\mathbb{1} \notin \tilde{S}$ nach Def von "wesentlich".

(ii) $\tilde{S}$ enthält keine Elemente der Ordnung 2 (weil G frei wirkt und jedes Elem. endl. Ordng einen Fixpunkt besitzt.)

(ÜA)

(iii) Sind e, e' wesentl. Kanten mit $g_e = g_{e'}$ so ist $e = e'$.



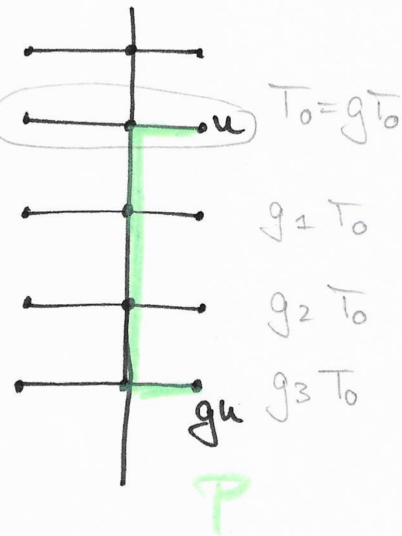
<u>Bew</u>. sonst $\exists$ 2 versch. Kanten, die T_0 mit $g_eT_0 = g_{e'}T_0$ verbinden. $\lightning$ zu T Baum $\square$

(iv) Ist $g \in \tilde{S}$ so ist $g^{-1} \in \tilde{S}$:

<u>Bew</u>: $g = g_e$ für eine wesentl. Kante e.
Es ist $g_e^{-1} = g_{g^{-1}e}$ und $g^{-1}e$ ist auch eine wesentliche Kante. $\square$

Es existiert also eine Teilmenge $S \subset \tilde{S}$ mit
$S \cap S^{-1} = \emptyset$ (falls $\neq \emptyset$ $\exists$ Elt der Ordng 2 $\lightning$)
$S \cup S^{-1} = \tilde{S}$ und
$|S| = \frac{1}{2} |\tilde{S}| = \frac{1}{2} \cdot \#$ wesentl. Kanten von T_0 in T.

<u>2. Schritt:</u> zeige $\tilde{S}$ (und insbes. S) erzeugt G.



Sei $g \in G$, sei u Ecke in T_0.
Weil T zushgd $\exists$ ein (reduzierter) Kantenweg p von u nach gu.
Weil $V(T) = V(\bigcup_{g \in G} gT_0)$ durchläuft p Kopien von T_0:

$g_0 T_0, g_1 T_0, \ldots, g_n T_0$ mit

$g_{j+1} \neq g_j \quad \forall j = 1, .., n-1$ und $g_0 = 1$, $g_n = g$.

Weil T_0 Fund.baum ist, ist $g_j T_0 \neq g_{j+1} T_0$ und $g_j T_0$ und $g_{j+1} T_0$ sind durch eine Kante e_j verbunden (eine Kante von p).
Nach Konstruktion ist daher $g_j^{-1} e_j$ eine wesentliche Kante und $s_j := g_j^{-1} g_{j+1}$ ist in $\tilde{S}$.

$$\Rightarrow g = g_n = \underset{\overset{\parallel}{1}}{g_0^{-1}} g_n = \underbrace{g_0^{-1} g_1}_{= s_0} \underbrace{g_1^{-1} g_2}_{= s_1} \cdots \underbrace{g_{n-1}^{-1} g_n}_{s_{n-1}}$$

$$= s_0 s_1 \,..\, s_{n-1} \in \langle \tilde{S} \rangle \subseteq G.$$

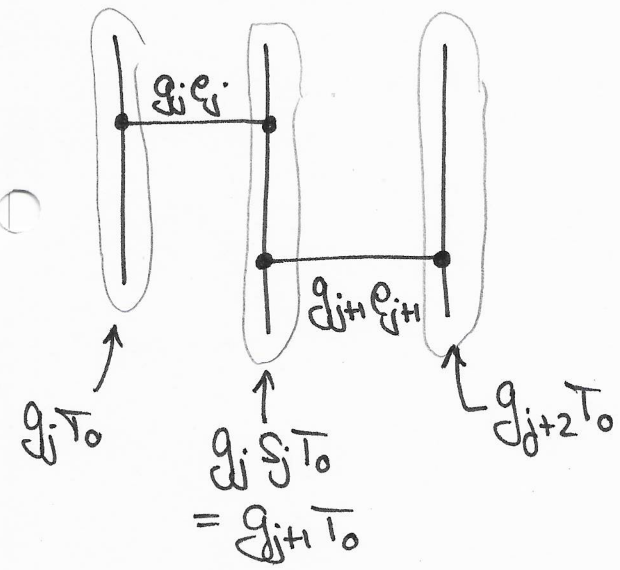
Weil g beliebig gewählt war ist $\langle \tilde{S} \rangle = G$.

<u>Bem.</u> Um $\mathrm{Cay}(G, \tilde{S})$ aus T zu erhalten kontrahiere jede Kopie gT_0 auf eine Ecke.

3. Schritt: $S \subset \tilde{S}$ erzeugt G frei.

Es reicht z.z., dass $Cay(G,S)$ keine Kreise enthält. (Satz 3.10)

Ann: Sei $g_0, \dots, g_{n-1}$ Zykel in $Cay(G,S)$. $g_n = g_0$.
Setze $s_j := g_j^{-1} g_{j+1}$ $\forall j = 0, \dots, n-1$.
Es ist $s_j \in S$ (oE sei S so gewählt).
Weiter sei e_j eine wesentliche Kante zwischen T_0 und $s_j T_0$ $\forall j = 0, \dots, n-1$.
Weil jede Kopie von T_0 zshgd Teilbaum von T ist, lassen sich die Ecken der Kanten $g_j e_j$ und $g_j s_j e_{j+1} = g_{j+1} e_{j+1}$, die in $g_{j+1} T_0$ liegen, durch einen eindeutigen Weg in $g_{j+1} T_0$ verbinden.



So konstruiert man einen Kreis in T, weil $g_n = g_0 = 1$ also $T_0 = g_n T_0$ ist.

↯ T Baum

$\Rightarrow$ S erzeugt G frei. $\square$

Satz 3.12