TdW: Freie Gruppen II

Wir sehen Anwendungen von 3.12 und nutzen Cayleygraphen um algebraische Eigenschaften zu zeigen.

3.16 Korollar (S.v. Nielsen-Schreier)

Untergruppen freier Gruppen sind frei.

Beweis: F freie Gruppe, $G<F$.
Mit 3.12 wirkt F dann frei auf einem Baum T.
Dann wirkt aber auch G frei auf T und somit ist G frei (mit 3.12) $\square$

3.17 Korollar (quantitative Version von 3.16)

Sei F freie Gruppe vom Rang n und $G<F$ UG vom Index $k\in\mathbb{N}$.
Dann ist G frei vom Rang $k(n-1)+1$.

Insbes. sind also UG von endl. Index in freien Gruppen von endl. Rang endlich erzeugt.

Index: $|F:G| = \#$ NK von G in F

Beweis Sei S freies EZS von F. Sei $\Gamma := Cay(F,S)$.
G und F wirken frei auf Γ durch Linkstranslation.
Aus dem Bew. von 3.12 sehen wir, dass
$\text{Rang}(G) = \frac{1}{2}\cdot E$ wobei $E = \#$ wesentl. Kanten eines ~~Fu~~ Fundamentalbaumes T_0 sind

Weil $|F:G| = k$ hat T_0 genau ~~$\$$~~ k Ecken.
Index $\hat{=}$ # Orbiten bzw # NK.

Es gilt: $d_T(v) = 2n = 2 \cdot |S| \quad \forall v \in V(T)$.
Eckengrad von v in T (T ist regulär)

Somit ist $\sum_{v \in V(T_0)} d_{T_0}(v) = k \cdot 2n$. $(*)$

Andererseits ist T_0 endlich und besitzt $(k-1)$ Kanten, die in $(*)$ alle doppelt gezählt werden. Somit ist

$$\sum_{v\in V(T_0)} d_T(v) = \underbrace{2(k-1)}_{2 \cdot \text{ kanten in } T_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kanten von } T_0 \text{ nach } T \setminus T_0}}{E}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Rang}(G).}}{\tfrac{1}{2}E} = k \cdot n - (k-1) = k(n-1)+1$$

$E = \sum d_T(v) - 2(k-1)$ $\square$

3.18 Korollar (ÜA)

Sei F frei vom Rang $m \geq 2$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ existiert eine (freie) UG G von F mit $\mathrm{rang}(G) = n$.

3.19 Ping-Pong Lemma

Sei G von $S=\{a,b\}$ ezeugte Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Wenn gilt:

(1) X besitzt disjunkte Teilmengen $A, B \subset X$ und

(2) $a^k(B) \subset A$ und $b^k(A) \subset B$ $\forall k \neq 0$ in $\mathbb{Z}$

dann ist G frei von S ezeugt.

<u>Beweis</u>: z.z. kein nicht-leeres reduziertes Wort entspricht der $\mathbb{1}$ in G.

Sei $g \in G$ geg. durch ein Wort der Form

$a^* b^* a^* \dots b^* a^*$ $\quad$ $*$ bedeutet: Exponent in $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Dann ist $g(B) \subseteq \cancel{B}\, A$ mit (2).

$\Rightarrow g \neq \mathbb{1}$ weil $B \cap A = \emptyset$ mit (1).

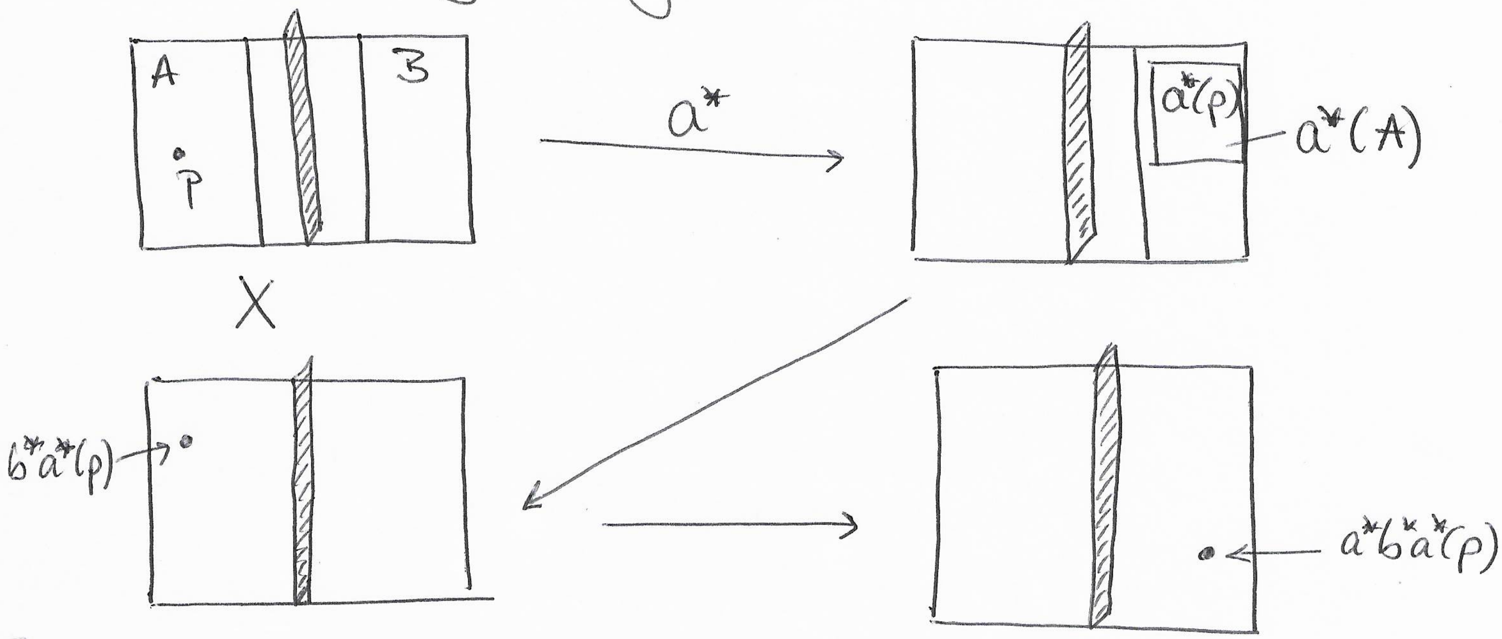
Jedes andere Gruppenelement $g' \in G$ ist konjugiert zu einem g obiger Form. (X)
Da aber $G \mathbb{1} G^{-1} = \mathbb{1}$ ist g nicht-trivial gdw es durch ein nicht-triviales reduziertes Wort geg. ist.

$\square$

(X) <u>Bsp</u>: a) $a^* b^* a^* b^* \dots b^*$ konjugiere mit a^k
s.d. $a^k a^* b^* \dots b^* a^k = a^* b^* \dots b^* a^*$

b) $b^* a^* b^* \dots b^*$ konjugiere mit a.

Warum "Ping-Pong"?



3.20 Bsp. Wir konstruieren eine freie UG in $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid ad-bc = \det(..) = 1 \right\}$

Beh.:
Die Gruppe $G := \langle M_1, M_2 \rangle_{SL(2,\mathbb{Z})}$ mit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist frei vom Rang 2.

Bew.: Wir spielen Ping-Pong!

Betrachte lineare Wirkung $SL(2,\underset{\mathbb{Z}}{\mathbb{R}}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(M, \binom{x}{y}) \longmapsto M\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Mx-mult mit Vektor

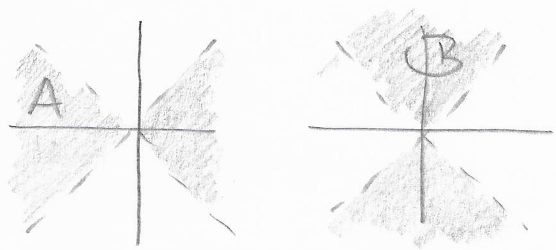
Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$M_1^n \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{x+2ny}{y}.$$

Definiere

$A := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \right\}$

$B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x| \right\}$



Es ist ($B \not\subset A$ und) $A \cap B = \emptyset$.

Für $\binom{x}{y} \in B$ gilt: $|x + 2ny| \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl}}}{\geq} |2ny| - |x|$

und $|2ny| - |x| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } n \geq 1 \text{ und } |y| > |x|}}{>} |2y| - |y| = |y|$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+2ny \\ y \end{pmatrix} \in A$ und somit $\Pi_1^n B \subset A$, $\forall n \neq 0$

Analog rechnet man nach, dass $\Pi_2^n A \subset B$ $\forall n \neq 0$.

Mit Ping-Pong Lemma folgt die Beh. $\square$

3.21 Satz (Rang ist wohldefiniert)

Zwei freie Gruppen $F(A)$ und $F(B)$ sind genau dann isomorph, wenn $|A| = |B|$.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei $|A| = |B|$. Dann $\exists$ Bijektion $\varphi: A \to B$, die mit der univ. Eigenschaft freier Gruppen eindeutig zu einem Homomorphismus $\bar{\varphi}: F(A) \to F(B)$ erweitert. Da A und B Erzsyst. sind und φ eine Umkehrabb. φ^{-1} besitzt ist $\bar{\varphi}$ ein Iso.

„$\Rightarrow$" Sei $F(A) \cong F(B)$, sei $\varphi: F(A) \to F(B)$ ein Isomorphismus.

Sei $N(A) \leq F(A)$ normale UG erzeugt von $\{g^2 \mid g \in F(A)\}$.

Die Gruppe $\varphi(N(A)) =: N(B)$ ist normal in $F(B)$ und erzeugt von $\{h^2 \mid h \in F(B)\}$.

$\Rightarrow$ φ induziert einen Iso $\psi: F(A)/N(A) \xrightarrow{\cong} F(B)/N(B)$.

Es ist aber $F(A)/N(A)$ isomorph zu $\bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $F(B)/N(B) \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ A und B die selbe Kardinalität haben.

warum?

Quadrate werden rausgeteilt

$\square$

4. endlich präsentierte Gruppen

Wir nutzen jetzt freie Gruppen, um neue (Quotienten-) gruppen zu erzeugen.

4.1 Def. (endlich) präsentierte Gruppen.

$\hat{=}$ Wörter über S

Sei S eine beliebige Menge und $R \subset (S^{\pm})^*$.
Die von S mit Relationen R erzeugte Gruppe ist gegeben durch

$$\langle S \mid R \rangle := F(S) / \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$$

Ist G gegeben, die zu $\langle S \mid R \rangle$ isomorph ist, so sagen wir: $\langle S \mid R \rangle$ ist Präsentierung (oder Darstellung) von G.
Ist S und R endlich, so ist G endlich präsentiert.

Bem: Es gibt Gruppen, von denen man weiß, dass es eine isomorphe endlich präsentierte Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ gibt, aber für die man R und S nicht explizit angeben kann.

Bem. Notation in 4.1 leicht unpräzise: R kann nicht-reduzierte Wörter enthalten F(S) aber nicht.

$\rightsquigarrow \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle \overline{R} \rangle$ $\quad \overline{R} = \{ \underbrace{\overline{w}}_{\text{reduzierte Form von } w} \mid w \in R \}$.

4.2 Bsp.

$= 1$ im Quotienten

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle x \mid x^n \rangle$

<u>Beweis</u> Betrachte $\varphi: F(x) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$$x \longmapsto 1$$

Dann ist $\langle x^n \rangle^{\triangleleft}_{F(x)} = \langle x^n \rangle = \ker(\varphi)$.

Weiter ist $F(x)$ abelsch, φ surjektiv also gilt $\langle x \mid x^n \rangle = F(x)/\ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

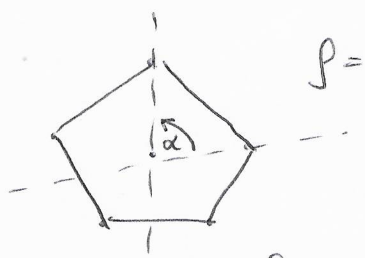
mit Isomorphiesatz: $f: G \to H$ Homom.
$K = \ker(f) \Rightarrow G/K \cong \operatorname{im}(f)$. $\square$

2) Es ist $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$

3) $G := \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-2}, yxy^{-1}x^{-2} \rangle$ ist trivial.
(ÜA)

4) Diedergruppe D_n lässt sich schreiben als:
$D_n \cong \langle s, t \mid s^n, t^2, tst^{-1}s \rangle =: G$

<u>Bew-Ansatz:</u> Betrachte $\varphi: D_n \to G$
$$\sigma \longmapsto t$$
$$\rho \longmapsto s$$



ρ = Rotation um α

σ Spiegelung

$\square$

5) Die Gruppe $\langle s,t \mid [t^n s t^{-n}, t^m s t^{-m}], n,m\in\mathbb{Z}\rangle$
ist endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert. (Baumslag 1961).

<u>Bem.</u>

1) Ob ein geg. $G=\langle S \mid R\rangle$ die triviale Gruppe ist, ist unentscheidbar, d.h. $\nexists$ Algorithmus der (geg. S und R) entscheidet, ob $\langle S \mid R\rangle = \{1\!\!1\}$ ist. (Berechenbarkeitstheorie).

2) I.A. ist das Wortproblem nicht lösbar d.h. man kann nicht entscheiden, ob ein geg Wort w über dem Alphabet $S^{\pm}$ das neutrale Element repräsentiert.

$\rightarrow$ Es gibt Klassen von Gruppen, für die das doch geht.

<u>4.3 Satz</u> (Univ. Eigensch. von Gruppenpräsentationen)

Sei S eine Menge, $R\subset (S\cup S^{-1})^*$.
Dann hat $\langle S \mid R\rangle$ folgende univ. Eigenschaft:

(UE) $\forall G$ Gruppe und $\forall \varphi: S\to G$ mit der Eigenschaft $\varphi^*(r)=1\!\!1$ $\forall r\in R$ gilt:
(kanon. Fo. von φ auf $(S\cup S^{-1})^*$)
$\exists!\ \bar\varphi: \langle S \mid R\rangle \longrightarrow G$ mit
$\bar\varphi\circ\pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \\
F(S)/\langle R\rangle = \langle S \mid R\rangle \arrow[ur, "\bar\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

zunächst Bsp. ab S. 59

Baumslags Bsp: endlich erzeugt aber nicht endl. präsentierte Gruppe.
$\rightsquigarrow$ ∞-viele solche existieren!

4.4 Satz (2-erzeugte Gruppen)

Es gibt überabzählbar viele (Isomorphieklassen von) Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden.

Bew-Skizze später.

4.5 Korollar (endl. erzeugte, nicht endl.-präs. Gruppen)

Es gibt überabzählbar viele (Isomorphieklassen von) endlich erzeugten Gruppen, die nicht endlich präsentiert sind.

Beweis: $\exists$ nur abzählbar viele endliche Darstellungen / Präsentierungen von Gruppen.
Mit Satz 4.4 folgt Beh. $\square$

Die nächsten zwei ~~Sätze~~ Propositionen beweisen Satz 4.4.

4.6 Proposition

Es gibt eine 2-erzeugte Gruppe G, die überabzählbar viele paarw. nicht-isomorphe normale Untergruppen hat.

Bew. Skizze 4.6

Betrachte $G := \langle s, t \mid R \rangle$ mit

$$R := \{ [[s, t^n s t^{-n}], s] \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ [[s, t^n s t^{-n}], t] \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

Sei C Untergr. von G erzeugt von der Menge $\{ [s, t^n s t^{-n}] \mid n \in \mathbb{Z} \} =: S_C \subset C < G$.

Dann ist C zentral in G, d.h. alle Elemente in C sind invariant unter Konjugation mit s und t (und somit $g \in G$) nach Def von R.

zB. ist $s[\cdot,\cdot]s^{-1} = [\cdot,\cdot]ss^{-1} = [\cdot,\cdot]$ für $[\cdot,\cdot] \in S_C$.

Man kann zeigen: $C \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.

Diese Summe enthält überabzb. viele UG:
Betrachte zB UG erzeugt von „Einheitsvektoren" zu verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{Z}$.
Alle solche sind normal in G, weil sie UG von C sind und C zentral ist. $\square$

4.7 Prop. G endlich erzeugt. Dann gilt:

(1) G enthält überabzb. viele paarw. nicht-isomorphe normale UG.

$\Updownarrow$

(2) G hat überabzb. viele paarw. nicht-isomorphe Quotienten.

Beweis: (1) ⇒ (2):

Wir zeigen $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$:
Ann.: G hat nur abzb. viele paarw. versch. Quotienten.
Sei Q so ein Quotient. Weil G endlich erzeugt ist, ist Q selbst abzählbar.
$\Rightarrow \exists$ abzb. viele Homom. $G \xrightarrow{\varphi} Q$.
$\Rightarrow \exists$ abzb. viele normale UG N von G
mit $G/N \cong$ ~~~~ Q (d.h. $\ker(\varphi) = N$).
Damit kann G aber nur abzb viele versch. normale UG haben, wenn es nur abzb. viele versch. Quotienten hat. ↯ zu (1) □
"⇒"

(2) ⇒ (1): Jedes Quotient Q besitzt einen Homom. $G \xrightarrow[\varphi]{} Q$. Sei $N := \ker(\varphi)$.
Dann sind für paarw. versch. Q, Q' auch die normalen UG N, N' in G verschieden.
(Sonst $\underset{Q \cong}{G/N} \cong \underset{\cong Q'}{G/N'}$ ↯ zu $Q \not\cong Q'$). □

Beweis 4.4:

Aus 4.6 und 4.7 folgt 4.4 ~~~~:

liefert überabzb. viele normale UG

liefert aus überabzb. vielen UG die zugeh. (versch.) Quotienten.

□

4.8 Beispiele endlich präsentierter (Klassen von) Gruppen

1) Coxetergruppen = Abstraktion von Spiegelungsgruppen, 2-erzeugt

Eine Coxetergruppe ist eine Gruppe, die eine Präsentierung der Form

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} \ \forall i,j \rangle$$

Konvention: falls $m_{ij} = \infty$ so steht hier keine Relation

besitzt, wobei $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \ \forall i,j$ und $m_{ii} = 1 \ \forall i$, sowie $m_{ij} \geq 2 \ \forall i \neq j$.

~~Bsp.:~~ Wir können die m_{ij} in eine Matrix schreiben $(m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = M$, genannt Coxetermatrix. Wir schreiben dann auch Γ_M für die durch M definierte Coxetergruppe.

z.B. a) ist die Diedergruppe $D_n = \Gamma_{\begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}}$

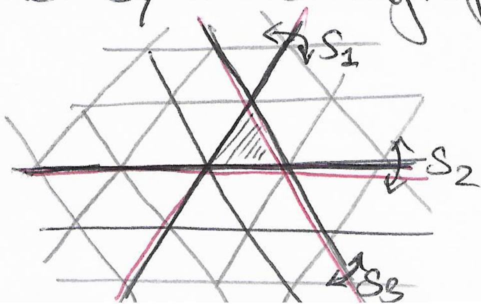
oder b) S_n = symm. Gruppe $= \Gamma_{M_{n-1}}$

$\frac{\pi}{m_{ij}}$ = Winkel zwischen H_i & H_j

mit $M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \cdots & & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(n-1)\times(n-1)$ Matrix

c) für $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist Γ_A die Symmetriegruppe der Parkettierung von $\mathbb{R}^2$ mit gleichseitigen Dreiecken.



Es ist zB ~~B~~ $D_3 = \Gamma_{\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}}$ kanonisch in T_Γ eingebettet.

2) <u>Artingruppen</u> $\langle s_1,\dots,s_n \mid \underbrace{s_is_js_i\cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_js_is_j\cdots}_{m_{ij}} \rangle$

$\cancel{\langle S_1,\dots,S_n \mid (S_iS_j)^{m_{ij}} \ \forall ij \rangle}$

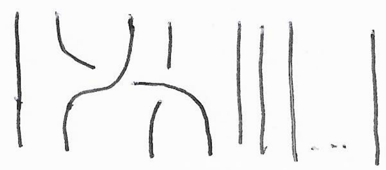
mit $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $m_{ij} \geq 2$ wenn $i \neq j$.

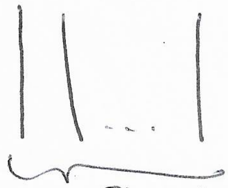
- Artingruppen haben als Quotienten die Coxetergruppe mit zusätzl. Relationen (s_is_i) ~~dh.~~ $m_{ii} = 1 \ \forall i$.
- freie Gruppen sind ~~Coxete~~ Artingruppen (setze $m_{ij} = \infty \ \forall ij$).
- freie abelsche Gruppen ($\cong \mathbb{Z}^n$) sind Artingruppen (setze $m_{ii} = \infty \ \forall i$ und $m_{ij} = 2 \ \forall i \neq j$).

<u>rechtwinklige Artingruppen</u> (RAAGs) sind Artingruppen mit $m_{ij} \in \{2, \infty\} \ \forall ij$.

3) <u>Zopfgruppen</u> B_n, $n \geq 1$

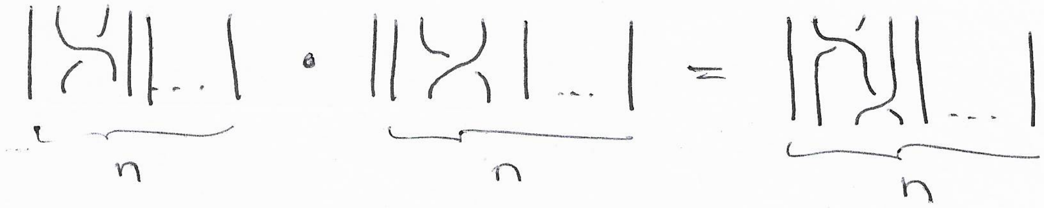
Elemente in B_n: n verknotete Stränge

zB 

triv. Element: $\hat{=}$ kein Knoten 

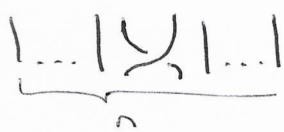
n Stück

Verknüpfung $\hat{=}$ Stapeln der Elemente



$B_{n+1} = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$ falls $j \neq i+1$ und $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} \rangle$

i-ter Strang

$x_i \hat{=}$  mit Inversem $x_i^{-1} =$ 

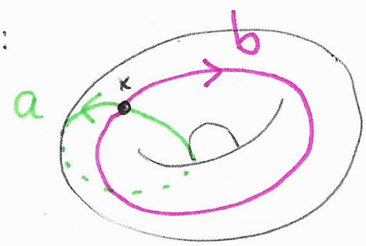
(⤳ geom. Bedeutung der Relationen erklären).

4) <u>Flächengruppen</u>

Sei S_g geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Dann gilt:

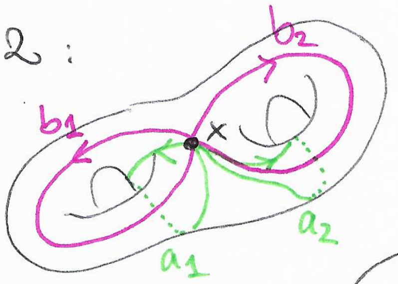
$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g b_g \mid \underbrace{\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]}_{= 1 \text{ in } \pi_1(S_g)} \rangle$$

$g=1$:



x = Basispkt für $\pi_1(S_g)$

$g=2$:



$g=n$: