TdW5: $\boxed{\text{Caylegraphen revisited}}$

Wir schauen uns nochmal genauer Eigenschaften von $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ an.

5. metrische Graphen und geodätische metrische Räume

5.1 Fakt: (metrische Graphen)
Wir können einen Graphen $\Gamma = (V, E, \delta)$ als <u>metrisches</u> Objekt betrachten:
Versehe jede Kante e mit einer Länge $l(e)$.
Dann ist die <u>metrische Realisierung</u> $|\Gamma|$ von Γ folgender Raum:

$$|\Gamma| = \bigsqcup_{e \in E} [0, l(e)] \Big/ \sim \qquad \text{wobei wir}$$

die Enden zweier Intervalle identifizieren, wenn die zugehörigen Kanten eine gemeinsame Ecke haben.

Definiere $d(x,y)$ für $x,y \in |\Gamma|$ wie folgt:

$$d(x,y) = \inf_{\substack{\gamma: x \rightsquigarrow y \\ \text{Pfad}}} l(\gamma), \quad \text{mit } l(\gamma) = \sup_{\substack{\text{Zerlegungen} \\ \text{von } [0,1]}} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

$\geq d(\gamma(0), \gamma(1))$

$\gamma: [0,1] \to |\Gamma|$ stetig

5.2 Def. / Konvention:

Wir realisieren $\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)$ immer mit Kantenlänge 1 für alle Kanten und schreiben statt $|\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)|$ auch einfach nur $\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)$.

Bem. Def 5.2 induziert eine Metrik auf $|\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)|$, sowie eine Metrik auf G = Ecken vom Cayleygraph durch Einschränken der Metrik.
Bezeichne diese Metrik durch d_S.

(ÜA) Zeige: $\forall g,h \in G$ ist
$$d_S(g,h) = \min\{n \mid \exists\, s_1 \cdots s_n \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_n,\ s_i \in S\}$$
und $d_S(g,h) = 0 \Leftrightarrow g = h$.

D.h. $d_S(g,h)$ ist die Wortlänge von $g^{-1}h$ bezüglich S.

5.3 Eigenschaft der Linkstranslation:

G wirkt durch Isometrien auf $\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)$.

Beweis: $\forall g \in G$ definiere eine Isometrie ϕ_g von $\mathrm{Cay}(G,S)$ durch:

$$\phi_g(x) = gx \quad \forall x \in G, \text{ sowie}$$

für ein x auf der Kante h_1 —— $h_2 = h_1 s$

Setze $\Phi_g(x) :=$ eind. Pkt x' auf gh_1 —— gh_2

für den gilt: $d_S(gh_1, x') = d_S(h_1, x)$.

Nachrechnen: Φ_g ist Isometrie mit

$$\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{gh} .$$

□

Cay(G,S) ist schön:

5.4 Eigenschaften von Cay(G,S):

1) $\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)$ ist eigentlich, d.h. abgeschl. Bälle sind kompakt.

2) Cay(G,S) ist geodätisch.

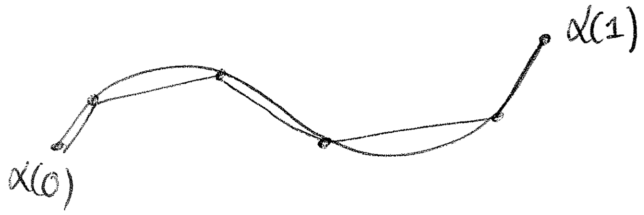
Bew 1): Klar, da jeder Ball von endlichem ganzzahligen Radius Vereinigung endlich vieler Kanten ist. □

Bew 2) kommt!

5.5 Def. Längen von Kurven

Sei $\alpha: [0,1] \to X$, stetig, ein Pfad in einem metr. Raum X. Dann ist die <u>Länge</u> von α geg. durch

$$l(\alpha) := \sup_{0=t_0\leq \ldots \leq t_n = 1} \sum d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$



<u>Bem:</u> Es gilt $\forall \alpha$
$l(\alpha) \geq d(\alpha(0), \alpha(1))$.

<u>Bem.</u> Schreibe $\alpha * \beta$ für die Verkettung zweier Pfade α, β mit $\alpha(1) = \beta(0)$.
Es ist dann $l(\alpha * \beta) = l(\alpha) + \alpha(\beta)$.

<u>5.6 Def.</u> (Geodäte und geodätischer Raum)

Ein Pfad γ ist eine <u>Geodäte</u> in X, wenn gilt: $l(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$.
Er ist <u>lokale Geodäte</u>, wenn $\forall\, t \in [0,1]$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ ist Geodäte.

Ein Raum X heißt <u>geodätisch</u>, wenn für alle Paare $x, y \in X$ eine Geodäte von x nach y existiert (d.h. α mit $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$).

<u>Bew.</u> 5.42): z.z. $Cay(G,S)$ ist geodätisch

Wir wissen, dass für $g,h \in G$ der Abstand $d_S(g,h) =$ Wortlänge von $g^{-1}h$ ist.
Somit existiert eine Geodäte $v \rightsquigarrow v'$ $\forall$ Ecken v,v' in $Cay(G,S)$.
Es ist auch klar, dass Geodäte $x \rightsquigarrow x'$ existiert, wenn x und x' auf einer Kante sind.

Man kann leicht sehen, dass dann gilt:

$$d_S(x,y) = \inf \{ d_S(x,g) + d_S(g,h) + d_S(h,y) \mid d_S(x,g), d_S(y,h) < 1 \text{ und } g,h \in G \}.$$

für x,y, die nicht auf einer gem. Kante sind.

ist ein „min"

Es ist klar, dass die Verkettung dreier Geodäten $x \rightsquigarrow g$, $g \rightsquigarrow h$, $h \rightsquigarrow y$ eine Geodäte von x nach y liefert (weil die Abstände sich entspr. aufaddieren). $\square$

<u>Bem.</u> Wir haben: Jede endlich erzeugte Gruppe wirkt auf einem eigentlichen, geodätischen metr. Raum.

⚠ $G \curvearrowright \{Pkt\}$ $\forall G$

hat auch diese Eigenschaften

Die Wirkg $G \curvearrowright Cay(G,S)$ ist schön!

<u>Def 5.7</u> Eine Wirkung $G \curvearrowright (X,d)$ heißt <u>eigentlich diskontinuierlich</u>, falls gilt:

$$|\{g \in G \mid B \cap g.B \neq \emptyset\}| < \infty \quad \forall \text{ Bälle } B \subseteq X.$$

d.h. $\forall x \in X$ und alle Bälle $B \subseteq X$ ist nur für endl. viele $x \in X$ $g.x$ in B.

<u>5.8</u> Eigenschaften von eigentl. disk. Wirkgen

Ist $G \curvearrowright X$ eigentl. disk., so gilt:

(i) Punktstabilisatoren sind endlich.

$$\uparrow\; G_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \qquad x \in X$$

(ii) Orbiten haben keine Häufungspunkte.

<u>5.9 Eigenschaften</u> von $G \curvearrowright Cay(G,X)$, G endl. erzeugt

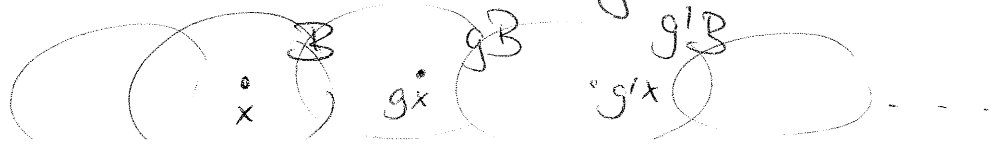
Die Linkstranslationswirkung ist

(i) eigentlich diskontinuierlich

(ii) ko-beschränkt.

b.w.

<u>5.10 Def.</u> $G \curvearrowright X$ ist <u>ko-beschränkt</u>, wenn es einen Ball $B \subseteq X$ gibt mit $G.B = X$.



Beweis 5.9

(i) Sei v Ecke in $\underbrace{Cay(G,S)}_{=:\Gamma}$. Dann ist $G.v = V(\Gamma)$.
Es ist klar, dass jeder Ball um v nur endl. viele andere Ecken v' enthält.
$\Rightarrow$ Beh.

(ii) Hier erfüllt ein Ball mit Radius = 1 um eine beliebige Ecke die Vor.

$\square$

5.10 Satz (UG von endl. Index isom. zu $\mathbb{Z}$).

Ist G endl. erz. und wirkt eigentl. disk. ~~...~~ und ko-beschränkt durch Isometrien auf $\mathbb{R}$, so besitzt G eine UG von endl. Index, die zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Beweis: Sei $\varphi: G \to Isom(\mathbb{R})$ die Wirkg.

Beobachtung: $\mathbb{R}$ ist angeordnet und jeder Isomorphismus ist entweder ordnungserhaltend oder -umkehrend.

$$\rightsquigarrow \quad Isom(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$\phi \longmapsto 1 \quad \text{g.d.w. } \phi \text{ die Ordng umkehrt}$$
$$\phi \longmapsto 0 \quad \text{sonst}$$

das ist ein Homomorphismus mit Kern K.

Dann ist $G' := \varphi^{-1}(K \cap \varphi(G))$ UG von G

und Index von G' in G ist ≤ 2.
Weiter wirkt jedes $g \in G'$ durch Translationen auf $\mathbb{R}$, weil es die Ordng auf $\mathbb{R}$ erhält.

Setze $m := \inf (G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0})$
= Infimum des positiven Teils des Orbits der Null.

$G \curvearrowright \mathbb{R}$ ko-beschränkt $\Rightarrow$ $G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset$.
eigentl. disk. $\Rightarrow$ inf. ist Minimum.
(weil Orbiten keine HP haben)

Also ist insbesondere $m > 0$.

Betrachte $\varphi : G' \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
$$\varphi(g) := \Psi(g)(0).$$
Dann ist $\varphi(G') \subset m\mathbb{Z}$.

<u>Beh.</u> φ ist Homomorphismus.

<u>Bew.</u> Sei t_g, $g \in G'$ die Zahl in $\mathbb{R}$ s.d.
$\Psi(g)(x) = x + t_g \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ($\exists$ weil G' durch Translationen wirkt).

Insbes. ist also $\underbrace{\Psi(g)(0)}_{\varphi(g)} = t_g$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(gh)}_{t_{gh}} = \varphi(g) + \varphi(h) = t_g + t_h .$$

Weiter ist $F := \ker(\varphi) = \mathrm{Stab}_{G'}(0)$.

endlich, weil $G \curvearrowright \mathbb{R}$ eigentl. diskr. (vgl. 5.8 (i))

Somit:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & F \arrow[r] & G' \arrow[r, "\varphi"] & m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] & 1 \end{tikzcd}$$

ist exakte Sequenz mit Schnitt (exist. immer hierfür)

$s : m\mathbb{Z} \to G'$ mit $\varphi \circ s = \mathrm{id}$.

$\Rightarrow$ $s(m\mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und hat in G' (also auch in G) endlichen Index. $\square$

ist die gesuchte Gruppe!

Wir betrachten jetzt folgende Fragen:

- In welchem Sinn hängt $\mathrm{Cay}(G,S)$ (nicht) von S ab?
  D.h. sind $\mathrm{Cay}(G,S)$ und $\mathrm{Cay}(G,S')$ in irgendeinem Sinne gleich?

- Welche Graphen können Caleygraphen sein?

Zuerst die zweite Frage:

<u>5.11 Satz von Sabidussi</u> (1958)

Sei Γ kombinatorischer Graph. Dann gilt:

(1) Eine Wirkung $\rho: G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ ist äquivalent zur Linkstranslationswirkung von G auf $\mathrm{Cay}(G,S)$ für ein reduziertes S, genau dann, wenn ρ_V transitiv und fixpunktfrei ist (~~und ρ_E transitiv ist.~~)

(2) Γ ist Caleygraph (von einem G bzgl einem red. S) g.d.w. $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ eine UG enthält, die transitiv und fixpunktfrei auf $V(\Gamma)$ wirkt.

<u>Bem.</u> $\rho_1: G \to \mathrm{Aut}(X_1)$ und $\rho_2: G \to \mathrm{Aut}(X_2)$ sind <u>äquivalent</u>, wenn gilt: $\exists$ Iso $f: X_1 \to X_2$, s.d. $\forall g \in G, \forall x_1 \in X_1$ ist $g.f(x_1) = f(g.x_1)$. (bzw. $\forall x_2 \in X_2$ ist $g.x_2 = f(g.f^{-1}(x_2))$.)

<u>Beweis</u> (1)

„$\Rightarrow$" folgt aus der Tatsache, dass L_g gerade der Multipl. in G entspricht.

„$\Leftarrow$" **Schritt 1: finde S**

Setze $\bar{S} := \{ g \in G \mid gx$ ist zu x benachbart in $\Gamma \}$.

<u>Bem a)</u>: $\bar{S}$ ist abgeschlossen unter Inversenbildung.

Sei $s \in \bar{S}$, dann ist $e = \{x, sx\}$ eine Kante in Γ. Dann ist auch $\{s^{-1}x, x\}$ eine Kante, weil G durch Automorphismen auf Γ wirkt.

~~B~~ Für ein $s \in \bar{S}$ gilt: $\quad \rho_v$ fixpktfrei

entweder $s^{-1}x = sx \Rightarrow s = s^{-1} \in \bar{S}$

oder $s^{-1}x \neq sx \Rightarrow s^{-1} \neq s$ und beide in $\bar{S}$.

Definiere S wie folgt:

Für $s = s^{-1}$ in $\bar{S}$ sei $s \in S$.

Für $s \neq s^{-1}$ in $\bar{S}$ wähle eines der beiden aus (zB s) und sei dieses in S.

Somit ist $x \sim sx$ g.d.w. s oder s^{-1} in S (beide gdw $s = s^{-1}$).

Schritt 2: definiere Morphismus

Wir suchen: $f : \Gamma' := Cay(G, S) \longrightarrow \Gamma = (V, E)$.
$\qquad = (V', E')$

Setze $f(h) := hx$ für selbes, festes x wie oben.

Ist $\{h_1, h_2\}$ Kante in Γ' so existiert (nach Def) ein $s \in S$ mit $h_2 = h_1 s$.

Dann ist $f(h_2) = h_2 x = h_1 s x$

und $f(h_1) = h_1 x$ und $\{h_1 s x, h_1 x\}$ ist Kante $\uparrow = h_1 . e$

weil $\underbrace{\{sx, x\}}_{=:e}$ Kante ist $\forall s \in S$.

Somit ist f Morphismus von Graphen.

$\boxed{\text{Schritt 3: zeige } f \text{ ist Iso!}}$

f ist injektiv, weil ρ_V fixpktfrei ist
($gx = hx \Rightarrow g^{-1}hx = x \Rightarrow g^{-1}h = \mathbb{1}$).

f ist surjektiv, weil ρ_V transitiv ist.
($\exists g \in G$ mit $gx = y \; \forall y \in V$
Es ist dann aber $y = f(g)$.)

Noch z.z. $e = \{y_1, y_2\}$ Kante in Γ, dann ist $f^{-1}(e)$ auch Kante in Γ'.

(ÜA)

Beweis (2):

„$\Rightarrow$" Linkstranslationswirkg ist transitiv und fixpktfrei auf $V(\Gamma)$.

„$\Leftarrow$" klar mit (1). $\square$

Jetzt zur 1. Frage:

Meist möchte man G unabhg von der Wahl eines Erz.Syst. untersuchen.
Wir untersuchen jetzt, in wieweit Cay(G,S) von der Wahl von S abhängt.
Dazu benötigen wir folgende Definition:

6. Quasi-Isometrie

6.1 Def. quasi-isometrische Einbettung.

X,Y metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.
Dann ist f eine <u>(C,D)-quasi-isometrische Einbettung</u>, wenn

$$\frac{1}{C} d(x,y) - D \leq d(f(x),f(y)) \leq C d(x,y) + D$$

$\forall x,y \in X$.
Wir sagen f ist eine <u>(C,D)-quasi-Isometrie</u>, wenn gilt: $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ mit $d(f(x),y) \leq D$, d.h. wenn f ein <u>quasi-dichtes Bild</u> in Y hat.

Bem. 1) $f(X)$ ist dann D-dicht in Y, wenn f eine quasi-Isometrie ist.

2) Wir sagen f ist <u>quasi-Isometrie</u>, wenn es (C,D)-qI. ist für eine Wahl von C,D.

3) Eine $(C,0)$-q.isom. Einbettg ist gerade eine Bilipschitz-Einbettung.

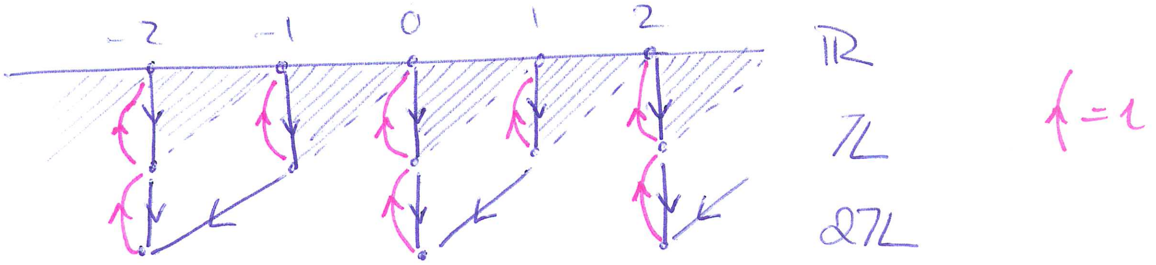
Bsp. 6.2

Die Inklusionsabb. $2\mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$ sind quasi-isometrische Einbettungen. (mit $C=1$ und $D=0$).
Aber keine bilipschitz-Äquivalenzen, weil nicht surjektiv.

Die Abb. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ und

$$g: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ gerade} \\ x-1 & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

sind auch quasi-isom. Einbettgen mit $C=1=D$.
Sie sind <u>quasi-Inverse</u> von den Inklusionsabb, d.h. $f\circ\iota$ und $\iota\circ f$ haben endlichen Abstand von id (ebenso $\iota\circ g$, $g\circ\iota$)



Def. 6.3 quasi-Inverse

Sei $f: X \to Y$ Abb. Dann ist $g: Y \to X$ eine <u>quasi-Inverse</u> von f, wenn es $D \geq 0$ gibt mit

$$d_X((g\circ f)(x), x) \leq D \quad \forall x \in X \text{ und}$$
$$d_Y((f\circ g)(y), y) \leq D \quad \forall y \in Y.$$

6.4 Eigenschaften von q.i.

(ÜA)

(1) Verkettung von q.i. Einbettgen (quasi-Isometrien) ist wieder eine q.i.E (bzw. q.I.).

(2) Sei f q.i.E. Dann ist f eine q.I genau dann, wenn es eine quasi-Inverse besitzt.

(3) Quasi-Isometrisch zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Insbes. bilden die Menge aller q.I. eines Raumes eine Gruppe.

Beweis:

(1) Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ q.i.E. bzgl (C,D).

Dann gilt $\forall x,y \in X$:

$$d(g(f(x)), g(f(y))) \leq C \cdot d(f(x), f(y)) + D$$

(*)
$$\leq C^2 \cdot d(x,y) + C \cdot D + D.$$

Umgekehrt gilt folgendes:

Für f,g (C,D)-quasi-Isom. wähle $z \in Z$.

Es exist. $y \in Y$ mit $d(g(y), z) \leq D$ (quasi-dicht)

und $x \in X$ mit $d(f(x), y) \leq D$.

Somit ist

$$d((g \circ f)(x), z) \leq d(g(f(x)), g(y)) + d(g(y), z)$$
$$\leq (CD + D) + D.$$

Also ist $g \circ f$ q.i. E.

□(1)

(2) vergl. Übungen.

(3) Die Identität ist q.I. von X auf sich.
Transitivität folgt mit (1) und Reflexivität folgt mit (2). $\square$

Jetzt können wir zeigen, dass "der" Cayleygraph von G wohldefiniert ist bis auf Quasi-Isometrie:

Satz 6.5 "Der" Cayleygraph ist q.I-invariant

Sei G Gruppe mit S, S' endliche Erz.syst. von G. Dann erweitert $id: G \to G$ zu einer quasi-Isometrie
$$Cay(G,S) \longrightarrow Cay(G,S').$$

Beweis: Betrachte folgende Abb.:
$$Cay(G,S) \xrightarrow[\varphi]{} (G, d_S) \xrightarrow[id]{} (G, d_{S'}) \xrightarrow[\iota]{} Cay(G,S')$$

wobei φ so gewählt, dass $x \in Cay(G,S)$ auf $g \in G$ abgebildet wird mit $d_S(x,g) \leq \frac{1}{2}$.
Die Abb ι ist die Inklusionsabb.

Die Abb. φ und ι sind $(1,1)$-q.I.
Also ist $\varphi \circ id \circ \iota$ eine q.I, wenn id ist.

Da id surjektiv ist rechnen wir nach, dass id_G eine $(C,0)$-q.I. Abb. ist.

Setze $c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(1\!\!1, s) < \infty$ weil S endlich.

Seien $g, h \in G$ und $d_S(g,h) =: n$.

Dann existieren $s_i \in S \cup S^{-1}$ s.d.

$$g^{-1}h = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n .$$

Dann ist aber

$$d_{S'}(\mathrm{id}_G(g), \mathrm{id}_G(h)) = d_{S'}(g,h)$$

$$= d_{S'}(g, gs_1 \cdots s_n)$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) + \ldots + d_{S'}(gs_1 \cdots s_{n-1}, gs_1 \cdots s_n).$$

$d_{S'}$ ist links-invar.

$$= d_{S'}(1\!\!1, s_1) + d_{S'}(1\!\!1, s_2) + \ldots + d_{S'}(1\!\!1, s_n)$$

$$\leq n \cdot c = c \cdot d_S(g,h).$$

Vertausche Rolle von S und S' und erhalte

$$d_S(\mathrm{id}_G(g), \mathrm{id}_G(h)) \leq \tilde{c} \cdot d_{S'}(g,h)$$

wobei $\tilde{c} := \max\{ d_S(1\!\!1, s') \mid s' \in S' \}$.

Setze nun $c_0 := \max\{c, \tilde{c}\}$. Dann ist id_G bilipschitz bzgl $(c_0, 0)$. $\square$

<u>Bem.</u> D.h. aus der Ferne sehen alle Cayleygraphen von G gleich aus.

Bem 6.6

Satz 6.5 ist $\overset{\curvearrowright}{\text{i.A.}}$ falsch für unendliche Erz.syst:

z.B. $(\mathbb{Z},+)$ mit Ez $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $Cay(\mathbb{Z},\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ hat endlichen Durchmesser

aber $(\mathbb{Z},+)$ mit $\{1\}$ $\rightsquigarrow$ hat ∞ = Diam.

aber ein Raum mit endl. Durchmesser kann nicht zu einem quasi-isom sein, der unendlichen Durchmesser hat.