Milnor-Švarč-Lemma

TdW 6

Folgender Satz ist das fundamentale Lemma der GGT und ein wesentlicher Grund warum man sich für Gruppen bis auf QI interessiert.

6.8 Milnor-Švarč-Lemma

Sei G eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierl. und ko-beschränkt auf einem geodätischen metrischen Raum (X,d) durch Isometrien wirkt. Dann gilt:

(1) G ist endlich erzeugt und

(2) G ist quasi-isometrisch zu X.

Bem: Außer der Existenz der Wirkung $G \curvearrowright X$ und deren Eigenschaften nehmen wir nichts über G an!

6.9 Kor

Sei G und X wie in 6.8 und S ein endliches EZ für G. Dann ist $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ q.i. zu X.

Beweis: Das folgt aus der Eigenschaft, dass $(G, d_S) \sim_{q.i.} \overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist. □

<u>Beweis 6.8:</u>

Wir zeigen zunächst: (1) G ist endl. erz.

Sei dazu $x_0 \in X$ ein (beliebig gewählter) Basispunkt in X. Sei $R>0$ so, dass

$$X = \bigcup_{g\in G} g.B_R(x_0).$$

Sei $B := B_R(x_0)$.

Wir setzen $S := \{ g\in G \mid g.B_R(x_0) \cap B_R(x_0) \neq \emptyset \}$.

Weil G auf X ~~[illegible]~~ eigentl. diskont. wirkt ist S endlich.

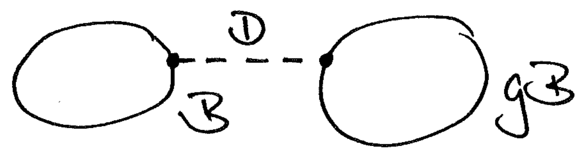
<u>Beh.</u> S erzeugt G.

Beobachte zunächst, dass B kompakt ist und somit die Konstante

$$c := \inf\{ d(B, gB) \mid g\in G\setminus S \} = \inf\{ d(x, gy) \mid x,y\in B,\ g\in G\setminus S \}$$

definiert und >0 ist.

Denn:



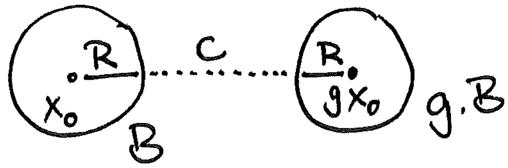
$D = \operatorname{dist}(B, gB)$

und es gibt höchstens endlich viele $g'.B$ mit Abstand $\leq D$ zu B.

$\Rightarrow$ c ist eigentl. ein Minimum über endlich viele $g\in G\setminus S$.

Wähle jetzt ein $g\in G\setminus S$. Wir wollen g mit Hilfe der $s\in S$ ausdrücken.

Es gilt: $d(x_0, g.x_0) \geq 2R + c \geq R+c$.

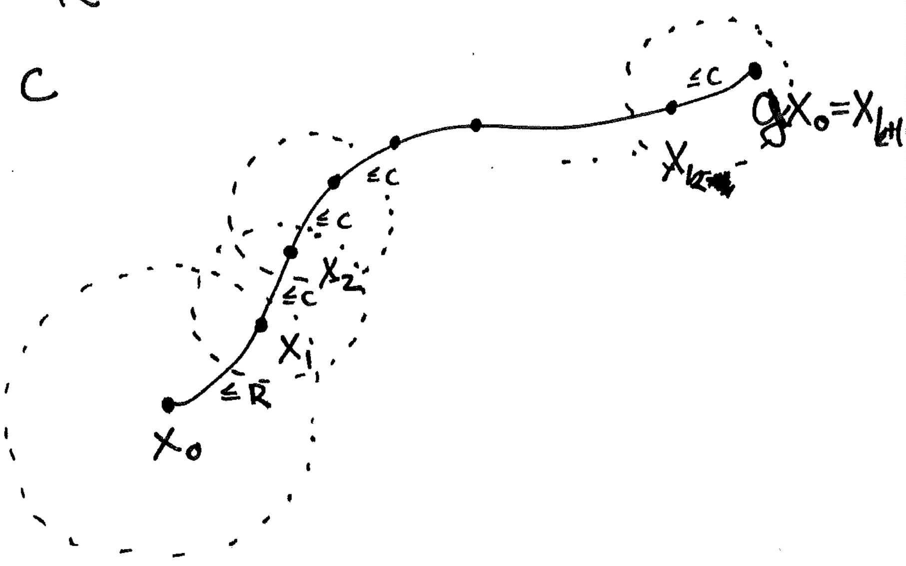


c = kleinstmögl. Abst.

Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ s.d.

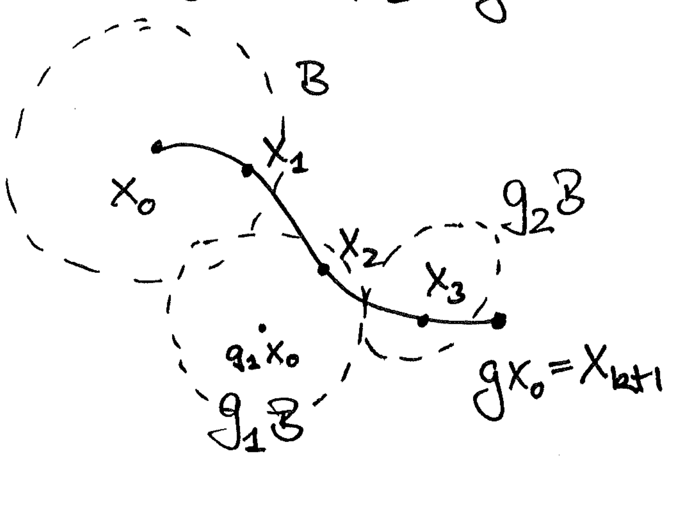
$$R + (k-1)\cdot c \leq d(x_0, gx_0) < R + k\cdot c.$$

Sei nun γ Geodäte von x_0 nach gx_0.
Wähle Punkte x_i auf γ s.d. $x_{k+1} = gx_0$
und s.d. $d(x_0, x_1) \leq R$
und $d(x_i, x_{i+1}) < c$
$\forall i = 1 \ldots k$.



Nach Def von c gibt es dann $g_i \in G$ mit $\mathbb{1} = g_0$, $g_k = g$
s.d. $\underline{\underline{x_{i+1}}} \in g_i B$ (gilt weil außerdem $X = \bigcup_{g \in G} gB$).

Damit $x_1 \in g_0 B = B$ ist muss $d(x_0, x_1) \leq R$ sein.



Setze $s_i := g_{i-1}^{-1} \cdot g_i$ für $i = 1 \ldots k$. Dann ist

$$d(B, s_iB) = d(g_{i-1}B, g_iB) \leq d(x_i, x_{i+1}) < c$$

$\Rightarrow s_i \in S$.

Es ist aber jetzt:

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_k = (\underbrace{g_0^{-1}}_{=\mathbb{1} \text{ weil } g_0 = \mathbb{1}} g_1)(g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{k-1}^{-1} g_k)$$

$$= g_k = g$$

und somit g durch S darstellbar. $\Rightarrow$ (1).

Als nächstes wollen wir zeigen, dass (G, d_S) zu X quasi-isometrisch ist:

Wir definieren die Bahn-Abbildung

$f: G \to X : g \mapsto g x_0$ für festes $x_0 \in X$.

Nach Konstruktion hat ~~ist~~ diese Abbildung f quasi-dichtes Bild in X (jeder Pkt in X hat höchstens Abst. R zu einem $g x_0$).

Bleibt noch z.z., dass f eine q.i. Einbettg ist.

D.h. finde $K \geq 1$ und $C \geq 0$ s.d. $\forall g, h \in G$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{K} d_S(g,h) - C \leq d(g x_0, h x_0) \leq K d_S(g,h) + C} \quad (*)$$

Wir können uns aus folgendem Grund auf den Fall $g = \mathbb{1}$ beschränken:

$$d(g x_0, h x_0) = d(x_0, (g^{-1}h) x_0) \quad \text{(Wirkg ist durch Isometrie)}$$

und ~~dabei~~ auch $d_S(g,h) = d_S(1, g^{-1}h)$. (Links-inv. der Wort-Metrik)

Sei also $h \in G$ beliebig und setze

$$L := \max\{ d(x_0, sx_0) \mid s \in S \}.$$

Sei $K := \max\{ \frac{1}{c}, L, 2R \}$ und $C := \max\{ \frac{1}{K}, c \}$.
Wir werden im Laufe der Rechnung sehen, warum das die richtige Wahl für K und C ist.

$\underline{h = \mathbb{1}}$: Dann ist $d(x_0, hx_0) = 0 = d_S(\mathbb{1}, h)$ und die Ungleichung $(*)$ ist erfüllt.

$\underline{h = s \text{ für } s \in S}$: Nach Def von S ist dann $d(x_0, sx_0) \leq 2R$. Weiter ist $d_S(\mathbb{1}, s) = 1$ und nach Definition oben $K \geq 2R$, $C \geq \frac{1}{K}$.
Somit

$$\frac{1}{K} d_S(\mathbb{1}, s) - C = \frac{1}{K} - C \leq 0 \leq d(x_0, sx_0) \ldots$$

$$\ldots \leq 2R \leq K \leq K \cdot \underbrace{d_S(\mathbb{1}, s)}_{=1} + \underbrace{C}_{\geq 0}$$

also gilt $(*)$.

Sei jetzt $\underline{h \in G \setminus S}$: Aus dem Beweis von (1) wissen wir, dass $d_S(\mathbb{1}, h) \leq k$ ist, wobei k hier so gewählt ist, dass

$$R + (k-1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0).$$

$$\Rightarrow R + (d_S(\mathbb{1}, h) - 1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0)$$

$$\Rightarrow c \cdot d_S(\mathbb{1}, h) - c \leq d(x_0, hx_0) - R \underset{\substack{\uparrow \\ R \geq 0}}{\leq} d(x_0, hx_0)$$

$R \geq 0$.

Beh: $d(x_0, hx_0) \leq L \cdot d_S(\mathbb{1}, h)$.

Gilt die Beh., so haben wir insgesamt, dass

$$c \cdot d_S(\mathbb{1}, h) - c \leq d(x_0, hx_0) \leq L \cdot d_S(\mathbb{1}, h).$$

Weil $K \geq L$ und $K \geq \frac{1}{c}$ und $C_1 \geq c$
ist somit (*) erfüllt.
Es bleibt also nur noch die Beh. zu zeigen:

Wir schreiben $h = s_1 \cdots s_k$, $s_i \in S$ $\forall i$.
(minimal)
Dann ist

$$d(x_0, hx_0) = d(x_0, s_1 \ldots s_k x_0) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 \ldots s_k x_0)$$

$$\overset{\text{multiple times }\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 s_2 x_0) + \ldots + d(s_1 s_2 \ldots s_{k-1} x_0, s_1 \ldots s_k x_0)$$

$$= d(x_0, s_1 x_0) + d(x_0, s_2 x_0) + \ldots + d(x_0, s_k x_0)$$

$$\underset{s_i \in S}{\leq} L \cdot k = L \cdot d_S(\mathbb{1}, h).$$

Somit gilt (2) und wir sind fertig $\square$

Bem. Milnor-Švarč liefert nur eine Quasi-Isometrie, keine Bilipschitz-Äquivalenz!

<u>6.10 Bem.</u> Die Voraussetzungen des Milnor-Švarč Lemmas lassen sich wie folgt abschwächen:

⌈ $G \curvearrowright X$, mit (X,d) metr. Raum, durch Isometrien.
Sei weiter X (C,D)-quasi-geodätisch, d.h. (mit $D>0$)
für alle $x,y \in X$ existiert eine (C,D)-quasi-Geodäte von x nach y, also eine (C,D)-quasi-Isometrische Abbildung (Einbettg)
$[0,l] \xrightarrow{\gamma} X$ mit $\gamma(0)=x$, $\gamma(l)=y$.

Außerdem existiere $B \subset X$ mit $\operatorname{diam}(B)<\infty$ und $X = \bigcup_{g\in G} gB$ sowie der Eigenschaft, dass

$S := \{ g \in G \mid gB' \cap B' \neq \emptyset \}$ endlich ist

für $B' := B_{2D}(B) = \{ x \in X \mid y \in B \text{ mit } d(x,y) \leq 2D \}$.

⌊ Dann ist G von S erzeugt und q.i. zu X.

<u>6.11 Bsp.</u> Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit eukl. Metrik.

verwendet Notation von 6.10

↑ ist geodätisch und alle geodätischen Räume sind quasi-geodätisch mit $C=1$, $D=0$

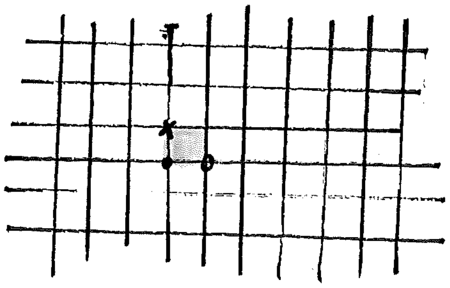
Sei $G = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright X$ durch Translationen,

d.h. $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}_{\in G}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in X}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x+n \\ y+k \end{pmatrix} \in X.$

Setze $\mathcal{B} := [0,1] \times [0,1]$, dann ist

$S = \{ \binom{n}{k} \in \mathbb{Z}^2 \mid \binom{n}{k} . \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset \}$

ein Erzeugendensystem (aber nicht minimal).



$x = \binom{0}{1}$ $\bullet = \binom{0}{0}$ $\circ = \binom{1}{0}$

• hier ist $D = 0$ also ist $\mathcal{B}' = B_{2D}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow S = \{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{-1}{0}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{1}, \binom{-1}{-1}, \binom{-1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{0}{0} \}$

Die Menge $S.\mathcal{B}$ ist gelb dargestellt.

(Es geht auch: x_0 als Mittelpkt des grünen Kästchens und $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dann Wahl von S wie im Bew 6.8).

Wir werden uns jetzt ein paar direkte Folgerungen daraus anschauen:

Abkürzend schreiben wir:

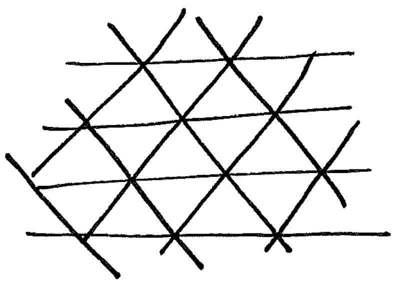
<u>Def. 6.12</u> ~~An~~ Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ heißt <u>geometrisch</u>, falls sie eigentlich diskontinuierlich, ko-beschränkt und durch Isometrien wirkt.

Das sind genau die Wirkungen, auf die wir Švarc-Milnor anwenden können!

<u>Bsp. 6.13</u> (Geometrische Wirkungen)

1) Translationswirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$.

2) Die Spiegelungsgruppe W in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, die durch die Spiegelungen am Aufspann der drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks erzeugt wird.



3) Die Linkstranslationswirkung einer Gruppe G auf jedem ihrer Cayleygraphen $\overrightarrow{Cay}(G,S)$, wenn G endl. erzeugt und S endl. EZ ist.

Wir können Milnor-Švarč auf Bsp 1)-3) anwenden und erhalten:
$\mathbb{Z}^2 \sim_{q.i.} \mathbb{R}^2$, $W \sim_{q.i.} \mathbb{R}^2$ und (als Bsp. im Sinne von 3)) die freie Gruppe F_k mit k Erzeugern ist q.i. zu einem $2k$-regulären Baum.

Wir schauen uns jetzt noch eine topologische Variante des Milnor-Švarč-Lemmas an. Dazu benötigen wir folgende Definitionen:

6.14 Quotientenräume

Sei (X,d) eigentlicher metr. Raum.
Sei $\alpha: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine Wirkung von G auf X.
Sei weiters $p: X \to {}_G\backslash X$ die natürliche Proj. auf den Quotienten.
Setze $\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) := \inf\{ d(x,y) \mid p(x)=\bar{x},\ p(y)=\bar{y}\}$.
für $\bar{x},\bar{y} \in {}_G\backslash X$. Dann gilt:

(i) "inf = min": $\exists\, x,y \in X$ mit $\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) = d(x,y)$.
und $p(x)=\bar{x}$, $p(y)=\bar{y}$.

(ii) $\bar{d}$ ist Metrik auf ${}_G\backslash X$.

Bew. ÜA .

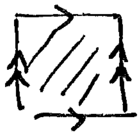
6.15 Def. Eine Wirkung $G \curvearrowright X$, mit X topologischer Raum, ist kokompakt, wenn ${}_{G}\backslash^{X}$ kompakt ist (bzgl der Quotiententopologie).

6.16 Bsp.: 1) X kompakt, wegzshgd, $\tilde{X}$ univ. ÜL
Dann ist $\pi_1(X) \curvearrowright \tilde{X}$ durch Decktransformationen eine ko-kompakte Wirkung.
(und eigentliche)

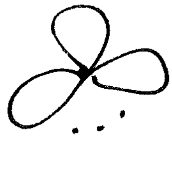
Es ist ${}_{\pi_1(X)}\backslash^{\tilde{X}} \cong X$.

2) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translation längs x-Achse ist nicht kokompakt.

${}_{\mathbb{Z}}\backslash^{\mathbb{R}^2} =$  nicht kompakt

3) $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translation ist kokomp.
und ${}_{\mathbb{Z}^2}\backslash^{\mathbb{R}^2} =$  flacher Torus.

4) $G \curvearrowright Cay(G,S) =: \Gamma$ ist ko-kompakt
und ${}_{G}\backslash^{\Gamma} =$ Rose mit $n = \#S$ Blättern.



Es gilt folgender Satz:

6.17 topologischer Švarč-Milnor

G wirke eigentlich, ko-kompakt und durch Isometrien auf einem eigentl. geodätischen metrischen Raum X, dann ist G endlich erzeugt und $G \to X : g \mapsto gx_0$ $\forall x_0 \in X$ eine Quasi-Isometrie.

ÜA: beweise 6.17 mit 6.8 oder mit Bem 6.10.

Wir sehen jetzt noch ein paar direkte erste Anwendungen von Milnor-Švarč.

6.18 Korollar

Sei G endlich erzeugt und $H < G$ UG mit $[G:H] < \infty$. Dann ist H endlich erzeugt und $G \sim_{qi.} H$.

Beweis: Sei S endliches Ezsyst dann wirkt $H \curvearrowright Cay(G,S)$ isometrisch durch Linksmultiplikation. Diese Wirkg erfüllt die Vor. von 6.8: Die Wirkg ist eigentlich diskontinuierlich weil G bereits so wirkt. Da der Index von H in G endlich ist, gibt es ein endliches Vertretersystem B von $H\backslash G$, das insbes. beschränkt ist.

Also ist $H \curvearrowright Cay(G,S)$ ko-beschränkt.

Darüber hinaus ist $Cay(G,S)$ geodätisch.

Satz 6.8 liefert also die Beh: denn □

$H \underset{6.8}{\sim_{q.i.}} Cay(G,S) \sim_{qi} G \Rightarrow H \sim_{qi} G.$

6.19 Korollar

Sei G endlich erzeugt und N endliche normale UG von G, dann ist $G/N \sim_{qi.} G$.

Bew. ÜA .

Bem:

Man kann 6.18 & 6.19 so lesen:

„Endliche Gruppen beeinträchtigen den q.i.-Typ einer Gruppe nicht."

Wir sagen G unterscheidet sich von G' durch eine endliche Gruppe, wenn entweder G isomorph zu einer UG von G' von endl. Index ist, oder umgekehrt.

Dann bedeutet 6.18 & 6.19:

Unterscheiden sich G und G' um eine endliche Gruppe, so ist $G \sim_{q.i.} G'$.

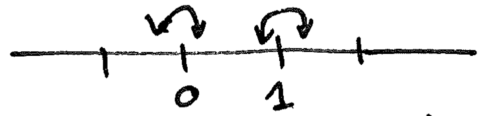
Als Konsequenzen aus obiger Bem erhalten wir:

6.20 Bsp.

1) Jede endliche Gruppe ist q.i. zur trivialen Gruppe.
2) D_∞ ist q.i. zu $\mathbb{Z}$.
3) $\forall k \geq 2$ ist F_k q.i. zu F_2.

Beweis:

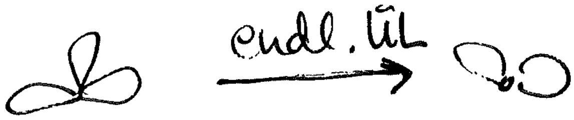
1) klar
2) sieht man entweder aus der Tatsache, dass D_∞ eine UG vom Index 2 hat, die zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist, oder über die Wirkg $D_\infty \curvearrowright \mathbb{R}$,



die kokompakt, eigentl. diskt. und via Isometrien ist; Milnor-Švarč liefert Beh.

3) ~~show this e.g. via constr~~
konstruiere explizite Quasi-Isometrie der zugehörigen Cayleygraphen zu freien EZ, d.h. T_{2k} und T_4. □

Oder:



k-Blätter 2 Blätter

$\pi_1(R_k) = F_k < \pi_1(R_2) = F_2$ induced embedding

ÜA Im Gegensatz zu 6.20 3) zeige:
Ist $\phi: \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ Homomorphismus und $m > n$, dann kann ϕ nicht injektiv sein.