7. QI - Invarianten

Welche Eigenschaften haben zwei (endl. ez.) quasi-isometrische Gruppen gemeinsam? Was über-trägt sich mittels QI?

Def 7.1

Sei V Menge (von Objekten einer Kategorie).
Eine QI-Invariante mit Werten in V ist eine Abbildung I : {endl. ez. Gruppen} $\longrightarrow V$ (einige)
s.d. $I(G) = I(H)$ $\forall$ G, H endl. ez mit $G \underset{QI}{\simeq} H$.

$\rightarrow$ hilfreich z.z. $G \not\simeq_{QI} H$.

$\rightarrow$ i.A. nicht gut um z.z. $G \underset{QI}{\simeq} H$, weil $I(G) = I(H)$ nicht implizieren muss, dass $G \underset{QI}{\simeq} H$.

7.2 elementare Bsp.

1) $V = \{0,1\}$, $I(G) = \begin{cases} 0 & G \text{ endlich} \\ 1 & G \text{ unendlich} \end{cases}$
ist eine QI-Invariante

2) $V = \mathbb{N}$, $I(F) := \text{rang}(F)$, F frei, endl. ez.
ist keine QI-Invariante

Manchmal ist folgendes leichter zu greifen:

Def 7.3 Eine Eigenschaft P von endl. ez. Gruppen heißt geometrisch, wenn gilt:
G hat P und $G \simeq_{QI} H$, dann hat H P.

Bsp. 7.4

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ ist die Eigenschaft virtuell (isomorph zu) $\mathbb{Z}^n$ zu sein eine geometrische Eigenschaft.

2) endlich zu sein ist geometrisch.

3) abelsch zu sein ist nicht geometrisch (z.B. gibt es endl. Gruppen sowohl abelsch als auch nicht abelsch.) (z.B. 1 abelsch, S_3 ¬abelsch)
Beweis für unendl. Gruppen ist sehr schwer.

4) (virtuell) frei und endl. erzeugt zu sein ist geometrisch.

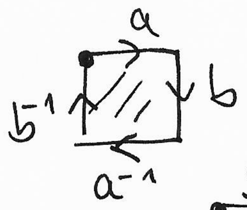
Ziel: 5) endlich präsentiert zu sein ist geometrisch.

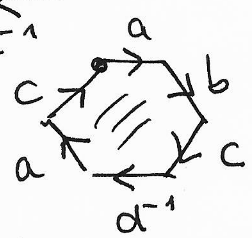
6) weitere Bsp: Hyperbolizität, (manche) Ränder von Gruppen, Enden, Gruppenwachstum

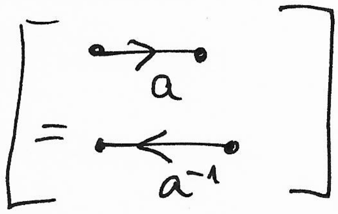
Um 5) beweisen zu können brauchen wir einen Raum auf dem die Gruppen wirken!

Def 7.5 Cayley-2-Komplex $\tilde{K}(S,R) =: \tilde{K}$
Sei G endl. präsentiert, d.h. $G \cong \langle S \mid R \rangle$ mit S und R endlich.
Konstruiere den Cayley-2-Komplex $\tilde{K}$ wie folgt:

- Für alle Relationen $r \in R$ mit $l(r) = n$ betrachte ein reguläres n-gon (Kantenlänge 1) mit ausgezeichneter Startecke und gerichteten, beschrifteten Kanten mit Wort r

z.B. $aba^{-1}b^{-1} \rightsquigarrow$ 

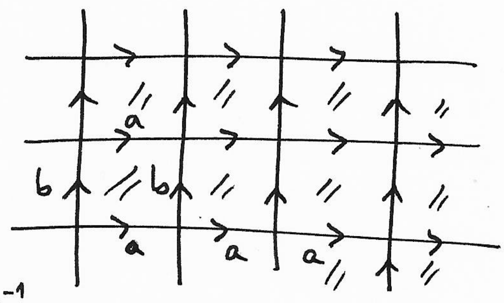
$abcd^{-1}ac \rightsquigarrow$ 

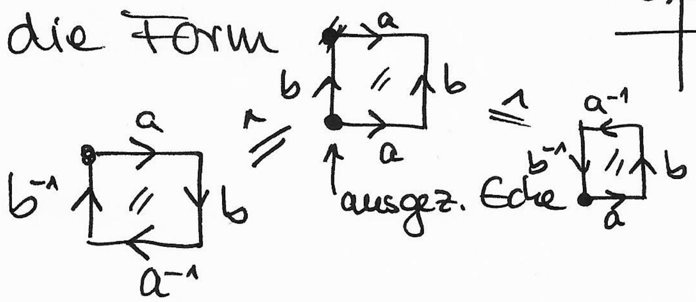
dabei ist: 

- betrachte den gerichteten (!) Cayleygraphen $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ und klebe an jede Ecke an der ein gerichtetes mit r beschrifteter Zykel startet eine der oben beschriebenen Zellen an.

Bsp. 7.6

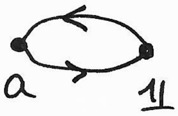
a) $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{a = \binom{1}{0}, b = \binom{0}{1}\}$, $R = \{r = aba^{-1}b^{-1}\}$

dann ist $\tilde{K}(G,R) =$ 

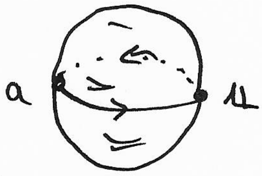
eine der Zellen hat die Form 

ausgez. Ecke

b) $G = \langle S | R \rangle$ mit $S = \{a\}$ und $R = \{a^2\}$

$\overrightarrow{Cay}(G,S) =$ 

Zelle:  wird 2x angeklebt. Am Pkt $\mathbb{1}$ und an Ecke a.

Dann ist $\tilde{K}(S,R) \simeq S^2$ 

(Bem: $G = \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ und $\tilde{K}$ = univ. cover von $\mathbb{RP}^2$)

Bem. An jeder Ecke (i.e. $g \in G$) wird eine Zelle pro Wort $r \in R$ eingeklebt!

Def 7.7. Präsentationskomplex $K := K(S,R)$

Sei $G = \langle S \mid R\rangle$ endlich präsentiert.

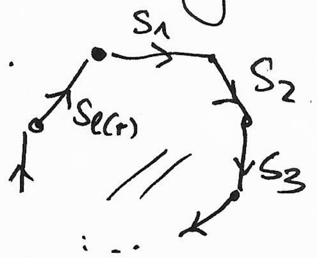
Definiere einen Raum (CW-Komplex) $K := K(S,R)$ wie folgt:

- K enthält eine Ecke v (0-Zelle)
- für alle $s \in S$ klebe eine orientierte und mit s beschriftete Kante e_s (der Länge 1) mit beiden Enden an v (1-Zellen)
- für jedes Wort $r \in R$ klebe eine Zelle D_r

$$r = s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(r)}}$$

($\ell(r)$-gon mit beschrifteten Kanten wie in 7.5) an die Kanten beschriftungs- und orientierungserhaltend an. (2-Zellen)

d.h.



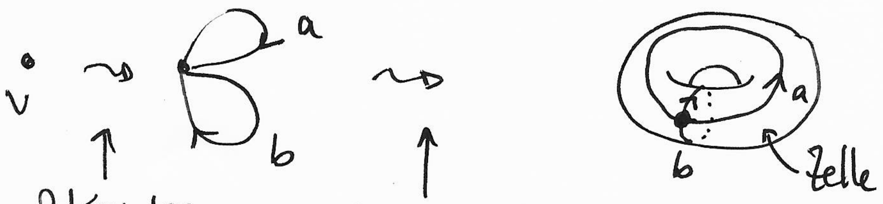
Zelle D_r. Klebe Kante $\xrightarrow{s_i}$ an Kante e_s orientierungserhaltend an, wenn $s_i \in S$ und orientierungsumkehrend, wenn $s_i^{-1} \in S$ und $s_i \notin S$.

$\lrcorner$

Bsp. 7.8

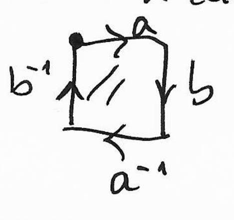
a) $G = \mathbb{Z}^2 \cong \langle a,b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$

Dann ist K wie folgt zu bauen:



2 Kanten e_a $\xrightarrow{a}$ und e_b $\xrightarrow{b}$

eine 2-Zelle



b) $\tilde{K} = \mathrm{Cay}(F_S, S)$, K = Rose mit $|S|$ Blättern

: $\#\text{loops} = |S|$

c) $K(\{a\},\{a^2\}) = \Bigg($  $\Bigg) \cong \mathbb{RP}^2$

<u>ÜA</u>: Man kann zeigen:

- K ist Quotient von $\tilde{K}$ modulo der natürlichen G-Linkstranslationswirkung auf $\tilde{K}$, d.h. $K = {}_G\backslash\tilde{K}$
- $\exists$ Für jeden anderen Raum X mit lokal isometrischer Abb $X \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} K$ gibt es eine lokale Isometrie $\tilde{K} \underset{\psi}{\twoheadrightarrow} X$ mit

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[d, "pr"'] \arrow[dr, two heads, "\psi"] & \\
K & X \arrow[l, two heads, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

<u>Bem.</u>: $\tilde{K}$ ist univ. Ül von K und $\pi_1(K) = G$.
(mit Seifert van Kampen)

<u>Lemma 7.9</u>

Sei G von S endlich erzeugt, $\pi: F(S) \to G$ die natürliche Projektion und $R \subset \ker(\pi)$.
Sei X der Komplex, den man durch Ankleben von 2-Zellen D_r wie in 7.5 aus $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ und R erhält. Dann gilt:

X ist einfach zshd $\Longleftrightarrow$ $\langle R \rangle^{\triangleleft}_G = \ker(\pi)$.

Beweis-Skizze (Siehe auch BH p. 135)

$\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist ~~ein~~ isomorph zum Quotienten $_{\ker(\pi)}\backslash \overrightarrow{Cay}(F(S),S)$, wobei $\overrightarrow{Cay}(F(S),S)$ ein Baum ist.

$\Rightarrow \pi_1(\overrightarrow{Cay}(G,S)) \cong N := \ker(\pi)$ und ein Wort in $S \cup S^{-1}$ ist in N g.d.w. es der Beschriftung eines Zykels in $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ entspricht, der in 1 beginnt und endet.

Sei $u \in F(S)$ ein reduziertes Wort und v_u Ecke in $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ in der der eindeutige Pfad mit Label u endet, der in 1 startet.

Klebe startend in v_u eine Scheibe (n-gon) an, deren Randkanten mit r beschriftet ist.

Dann gilt: $\pi_1\left(\begin{array}{c}\text{resultierenden}\\ \text{2-Komplex}\end{array}\right) = N/\langle u^{-1} r u\rangle$.

Allgemein gilt mit Seifert van Kampen:

$$\pi_1\left(\begin{array}{l}\overrightarrow{Cay}(G,S) \text{ verklebt mit}\\ \text{2-Zellen } D_r \ \forall\, r \in R\\ \text{und } \forall\, u \in G\end{array}\right) = N/\underbrace{N(R)}_{:= \langle R\rangle^{\triangleleft}_{G}}$$

Insbes. ist dieser Kplx einf. zshgd. g.d.w. $\langle R\rangle^{\triangleleft}_{G} = N$.

$\square$

Satz 7.10

Endlich präsentiert zu sein ist geometrisch.

Genauer:

G endl. erz. von S mit Relationen R, $|R|<\infty$.
Sei H von S' endlich erzeugt und $H \simeq_{QI} G$.
Dann ist H endlich präsentiert und es existiert eine endl. Menge an Relationen R' s.d. $H \cong \langle S' \mid R' \rangle$.

Beweis: Siehe S. 103 ff. Material HD WS 17/18 $\square$

Beweis ~~7.5~~ 7.10

Setze $G_1 := G$, $G_2 := H$ und $\Gamma_i := \overrightarrow{Cay}(G_i, S_i)$.
$S_1 := S$, $S_2 := S'$

Sei ρ die Länge des längsten Wortes in R.

Wir wissen, dass der Cayley-2-Komplex $\tilde{K}_1$ von G_1 einfach zshgd ist.

Es ist $G_1 \sim_{QI} G_2$, somit existieren (C,D)-quasi-Isometrien f, f', die quasi-invers sind:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, bend right, "f'"'] & \Gamma_2 \arrow[l, bend right, "f"'] \end{tikzcd} \quad \text{für gewisse } C, D.$$

Sei weiter $\mu > 0$ so gewählt, dass
$$d(f'(f(v)), v) \leq \mu \quad \forall v \in \Gamma_2.$$
(Geht, weil f, f' quasi-Inverse.)

Setze $m := \max\{\rho, \mu, C, D\}$ und
$M := 3 \cdot (3m^2 + 5m + 1)$.

Konstruiere einen 2-Komplex K_2' aus Γ_2 durch Ankleben einer 2-Zelle an jeden Kreis (reduziert!) der Länge $\leq M$ in Γ_2.

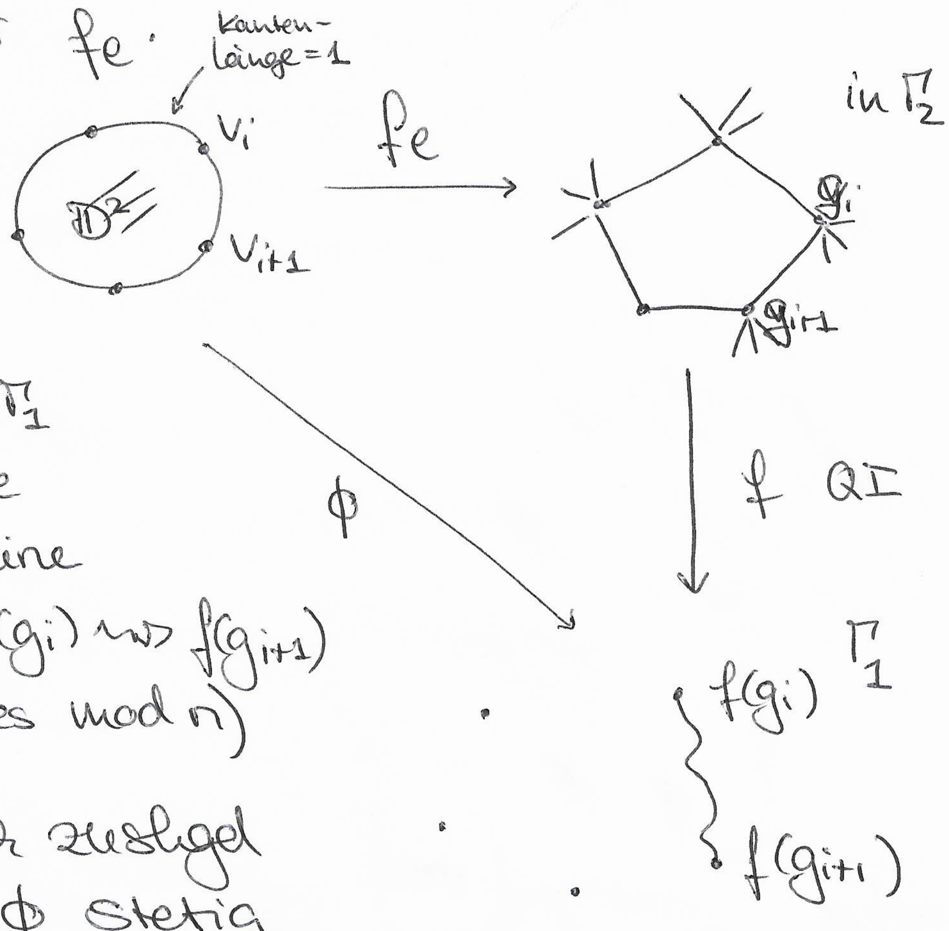
(Achtung: K_2' ist kein Präsentationskplx, da wir noch nicht wissen, dass G_2 endl. präs. ist.)

Sei jetzt ℓ ein Kantenkreis in Γ_2, d.h. $\ell = (g_1, \dots, g_n, g_1)$ mit $g_i \in G_2$.

Betrachte (stetige) Abb. $f_\ell : \partial \mathbb{D}^2 \longrightarrow \Gamma_2$, wobei $\mathbb{D}^2 =$  Kreisscheibe mit simpliz. Rand mit n Kanten und $f_\ell(\partial \mathbb{D}^2) = \ell$.

Ref mit Lemma ~~5.10~~ 7.9 folgt dann, dass G_2 endl. präsentiert ist, wenn wir zeigen können, dass f_ℓ eine stetige Fortsetzung $\hat{f}_\ell : \mathbb{D}^2 \longrightarrow K_2'$ besitzt, d.h. K_2' einf. zshgd ist.

Um dies zu zeigen, seien v_i die Urbilder von g_i unter f_ℓ.



Sei nun $\phi : \partial \mathbb{D}^2 \to \Gamma_1$ eine Abb, die v_i auf $f(g_i) \in \Gamma_1$ und die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ auf eine Geodäte von $f(g_i) \rightsquigarrow f(g_{i+1})$ schickt. (Indizes mod n)

Weil $\hat{K}_1$ einfach zshgd ist erweitert ϕ stetig auf eine Abbildung $\hat{\Phi}: \mathbb{D}^2 \to \tilde{K}_1$.

Wir werden jetzt mit Hilfe von $\tilde{K}_1$ die Scheibe $\mathbb{D}^2$ triangulieren und damit eine Erweiterung $\hat{f}_e$ von f_e definieren.

- $\forall x \in \mathbb{D}^2$ definiere Elemente $h_x \in G_1 = V(\Gamma_1) = G$ wie folgt:
  1) ist $\hat{\Phi}(x)$ eine Ecke, so setze $h_x = \hat{\Phi}(x)$. Insbes. ist $h_{v_i} = f(g_i)\ \forall i$!
  2) ist $\hat{\Phi}(x)$ in einer offenen Kante / 2-Zelle enthalten, so wähle eine (beliebige) Ecke der Kante / Zelle als h_x.

  Weil $\hat{\Phi}$ stetig ist gilt dann $d(h_x, h_y) \leq \rho$ $\forall x, y$, die "nah genug" sind in $\mathbb{D}^2$.
  Weiter ist $d(\Phi(x), h_x) \leq \frac{1}{2}$ $\forall x \in \partial\mathbb{D}^2$. (weil Kanten in $\partial\mathbb{D}^2$ alle Länge 1 haben).

- Trianguliere $\mathbb{D}^2$ nun so, dass alle Ecken v_i in $\partial\mathbb{D}^2$ Ecken der Triangulierung $\mathcal{T}$ sind und, dass $\forall$ ~~Na~~ benachbarten Ecken t, t' von $\mathcal{T}$ gilt: $d(h_t, h_{t'}) \leq \rho$.

- Setze $\hat{f}_e|_{\partial\mathbb{D}^2} = f_e$ und $\hat{f}_e(x) := f'(h_x)$ $\forall x$ im Inneren von $\mathbb{D}^2$.

Beh. $\forall$ benachbarten Ecken t, t' der Triangulierung $\mathcal{T}$ ist

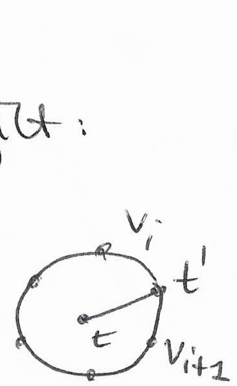
$$d_{\Gamma_2}(t, t') \leq M/3 .$$

Ist die Beh. wahr, so können wir $\hat{f}_e$ stetig auf $\mathbb{D}^2$ erweitern, indem wir Kanten von $\mathcal{T}$ auf Geodäten in Γ_2 schicken und einsehen, dass (nach Konstruktion) Kreise der Länge $\leq M$ eine 2-Zelle in K_2' beranden.

$\rightsquigarrow$ $\hat{f}_e$ kann stetig auf die Dreiecke in $\mathcal{T}$ von $\mathbb{D}^2$ erweitert werden.

ZZ ist also noch die Beh.:
Es muss nur t Ecke in $(\mathbb{D}^2)^\circ$ = Inneres von $\mathbb{D}^2$ betrachtet werden und $t' \in \partial\mathbb{D}^2$.

Sei t' zwischen v_i und v_{i+1}. Dann gilt:



$$
\begin{aligned}
d(\hat{f}_e(t), \hat{f}_e(t')) &= d(f'(h_t), f_e(t')) \\
&\leq d(f'(h_t), f'(h_{t'})) \\
&\quad + d(f'(h_{t'}), f'(\phi(t'))) \\
&\quad + d(f'(\phi(t')), f'(\phi(v_i))) \\
&\quad + \underbrace{d(f'(\underbrace{\phi(v_i)}_{\text{in } \Gamma_1}), \underbrace{f_e(v_i)}_{\text{in } \Gamma_2})}_{\text{in } \Gamma_2} + d(f_e(v_i), f_e(t')) \\
&= (*)
\end{aligned}
$$

mehrfaches Anwenden der Δ-Ungl.

f' ist eine (C,D)-QI

$d(h_t, h_{t'}) \leq \rho$

$$\otimes \leq (C\cdot\rho + D) + (C\cdot\tfrac{1}{2} + D) + [\,C\cdot d(\phi(v_i), \phi(v_{i+1})) + D\,] + d(f'(\underbrace{f(g_i)}_{=\phi(v_i)}), g_i) + 1$$

$$\leq (C\rho + D) + (\tfrac{C}{2} + D) + (C\cdot(C+D) + D) + \mu + 1$$

$$\leq 3m^2 + 5m + 1 \leq M/3$$

$\square$

Wir werden in den nächsten Wochen noch einige weitere Beispiele für QI-Invarianten kennen lernen:

- Hyperbolizität
- Enden von Räumen / Gruppen
- Gruppenwachstum