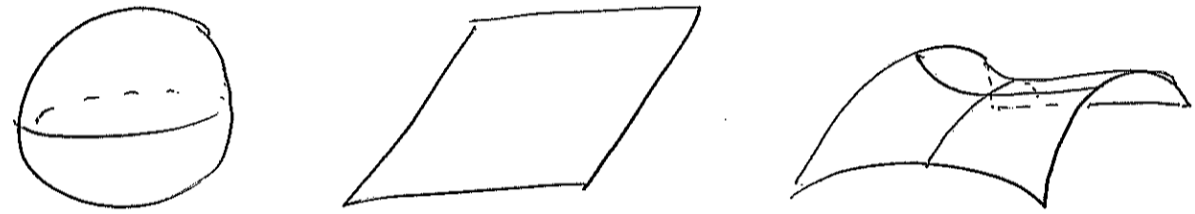
δ-Hyperbolische Räume / Gruppen

TdW 8 & 9

8. Hyperbolische Räume und Gruppen

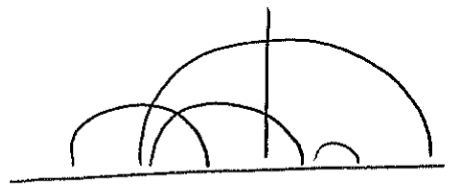
Krümmung: misst intrinsische Geometrie eines Raumes

(Modell)räume konstanter Krümmung K:



$\mathbb{S}^n$, $K>0$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$, $K=0$ $\qquad$ Sattelfläche, $K<0$

oder



$\mathbb{H}^n$

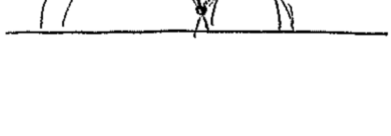
$K<0$

$K<0$:

Geometrien "breiten sich schneller aus" als in $\mathbb{R}^2$, Dreiecke sind "dünn":

z.B.

oder



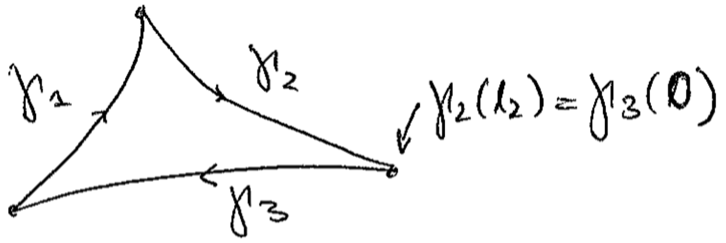
oder

Wir formalisieren diese Eigenschaften und führen (verschiedene Def von) δ-hyperbolischen Räumen ein.

Def 8.1 (X,d) metrischer Raum.

Ein geodätisches Dreieck Δ in X ist ein Tripel von Geodäten γ_i $i=1,2,3$ mit $\gamma_i : [0,l_i] \to X$ so, dass gilt:

$\gamma_1(l_1)=\gamma_2(0)$, $\gamma_2(l_2)=\gamma_3(0)$, $\gamma_3(l_3)=\gamma_1(0)$.



Def 8.2

Ein geodätisches Dreieck ist δ-dünn, wenn

$$\mathrm{Im}(\gamma_i) \subset U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j) \cup \mathrm{Im}(\gamma_k))$$

mit $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$. $\qquad U_\delta$ = offene δ-Umg

Ein metr. Raum ist δ-hyperbolisch, falls er geodätisch ist und alle geodätischen Dreiecke δ-dünn sind.

Er heißt hyperbolisch, falls ein $\delta \geq 0$ existiert s.d. er δ-hyperbolisch ist.

wir werden, wenn nichts anderes gesagt wird, immer diese Def ~~...~~ verwenden!

Bsp. 8.3

1) Geodät. Räume von endl. Durchmesser sind δ-hyperbolisch.

2) $(\mathbb{R}, d_{eukl})$ ist 0-hyperbolisch: 

alle Dreiecke sehen so aus

3) $(\mathbb{R}^2, d_{eukl})$ ist <u>nicht</u> hyperbolisch.

4) $(\mathbb{H}^2, d_{hyp})$ ist $\ln(3)$-hyperbolisch.

→ dazu später mehr.

5) Simpliziale Bäume (sowie $\mathbb{R}$-Bäume) sind 0-hyperbolisch.

Es gibt viele weitere (äquivalente) Charakterisierungen δ-hyperbolischer Räume. Betrachte z.B. folgende Def:

Def 8.4

Die <u>Innenpunkte</u> eines geod. Dreiecks seien 3 Pkte auf den 3 Seiten, die die Seiten so in jew. zwei Teile schneiden, dass die an einer Ecke benachbarten Teile die gleiche Länge haben. →

(Man löst eindeutig das System $a = r+s$, $b = s+t$ und $c = t+r$ nach r, s, t.)

In $\mathbb{R}^2$:

Innenkreis eines Dreiecks schneidet die 3 Seiten in je einem Punkt s.d. für die Längen gilt:

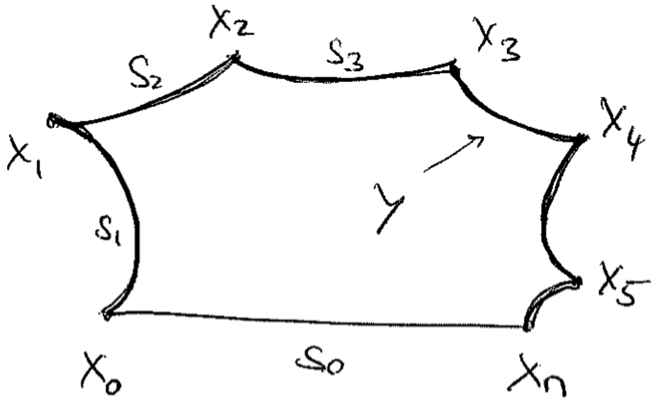
i.A. ist so ein Kreis nicht (so leicht) zu finden.

Def 8.5. (alternative Def!)
Ein Dreieck ist <u>δ-hyperbolisch</u>, wenn alle geodätischen Dreiecke Innengröße $< \delta$ haben. Dabei ist die <u>Innengröße</u> das Maximum der 3 paarw. Innenpunkte des Dreiecks. X ist <u>δ-hyp</u>, wenn alle seine geodätischen Dreiecke δ-hyp. sind.

ÜA: Zeigen Sie, dass X δ-hyp. (im Sinne von 6.2) $\Leftrightarrow$ X δ'-hyp. (im Sinne von 6.5.).

<u>Bem</u>: Wir verwenden im Folgenden immer Def 6.2!

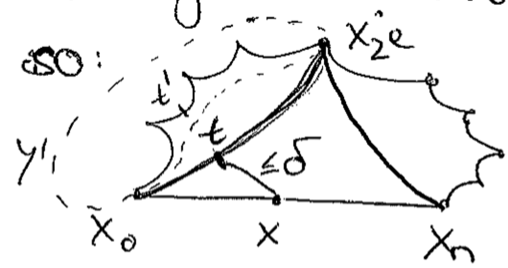
8.6 <u>Satz</u> (iterierte Dünnheit)
(X,d) δ-hyperbolisch.
Sei P ein geodätisches Polygon mit Ecken $x_0, x_1, \dots, x_n$ und Kanten (Geodäten) $s_i : x_{i-1} \rightsquigarrow x_i$, $i = 1,\dots,n$ und $s_0 : x_0 \rightsquigarrow x_n$.
Setze $Y = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(s_i)$.
Dann gilt:
$\forall x \in \mathrm{Im}(s_0)$ ist $d(x,Y) \le k \cdot \delta$ mit $k := \lceil \log_2 n \rceil$.



Beweis: Wir zeigen die Beh. zunächst für ~~d~~ $n = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ mit Induktion über l.
D.h. z.z. $d(x,Y) \leq l \cdot \delta \;\; \forall\, l \in \mathbb{N}$.

$l=1$: Dann ist $n = 2$ und Beh folgt aus Def δ-hyperbolisch (6.2).

$l \to l+1$: $n = 2^{l+1}$. Wähle $x \in \operatorname{Im}(\gamma_0)$ fest.
Wähle geodät. Segmente $[x_0, x_{2^l}]$ und $[x_n, x_{2^l}]$ so:



Wir wissen, dass das Dreieck $x_0\, x_{2^l}\, x_n$ mit den gewählten geod. Segmenten δ-dünn ist. Dann existiert $t \in [x_0, x_{2^l}] \cup [x_{2^l}, x_n]$ s.d. $d(x,t) \leq \delta$.
Sei OE $t \in [x_0, x_{2^l}]$. (siehe Bild oben).

Nach Ind. Vor. ist

$$d(t, \underbrace{\bigcup_{i=1}^{2^l} \operatorname{Im}(s_i)}_{=:Y'}) \leq l \cdot \delta \qquad \text{(siehe Bild)}$$

$\Rightarrow \exists\, t' \in Y'$ mit $d(t,t') = d(t,Y') \leq l \cdot \delta$.

$$\Rightarrow d(x,Y) \leq d(x,t') \leq d(x,t) + d(t,t')$$

Δ-Ungl.

$$\leq \delta + l \cdot \delta = (1+l) \cdot \delta \qquad \square_{n=2^l}$$

Sei jetzt n beliebig. Füge r zusätzliche Stützpkte auf den n geodät. Stücken hinzu so, dass $n + r = 2^l$ mit $l = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. $\Rightarrow$ Beh mit obigem Bew. $\square$

Ziel: Zeige "hyperbolisch" ist invariant unter QI.

Problem: Das Bild eines geod. Dreiecks unter einer QI ist kein geod. Dreieck mehr.

Def 8.7 (quasi-geod. Dreieck)

(X,d) metr. Raum. Ein (c,d)-quasi-geodätisches Dreieck in X ($c \geq 1$, $d \geq 0$) ist ein Tripel γ_i von (c,d)-quasi-Geodäten

$\gamma_i : [0, l_i] \to X \quad i = 1,2,3$

$\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$ (Indizes zyklisch).

Def 8.8 (quasi-hyperbolisch) ← i.A. sehr schwer nachzurechnen, weil es "zu viele" quasi-geodäten gibt.

Ein (c,d)-quasi-geodätisches Dreieck ist δ-dünn wenn $\operatorname{Im}(\gamma_i) \subset U_\delta(\operatorname{Im}(\gamma_j) \cup \operatorname{Im}(\gamma_k))$ $\forall \{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Ein metr. Raum (X,d) heißt (c,d,δ)-quasi-hyperbolisch, falls X (c,d)-quasi-geodätisch ist und alle solchen ~~quasi-Geodäten~~ quasi-geod. Dreiecke δ-dünn sind.

Wir sagen X ist (c,d)-quasi-hyperbolisch, falls ein $\delta > 0$ exist. s.d. X (c,d,δ) qh ist.

Schreibe abkürzend q.h. für quasi-hyperbolisch.

8.9 Prop. ("quasi-hyperb." ist QI-invariant)

(X,d_X), (Y,d_Y) metr. Räume. Dann gilt:
Ist $X \sim_{QI} Y$ so sind folgende Äquivalenzen wahr:
(1) X quasi-geodätisch $\Leftrightarrow$ Y quasi-geodätisch
(2) X quasi-hyperbolisch $\Leftrightarrow$ Y quasi-hyperb.

Beweis (1): Sei OE Y quasi-geodätisch und $f: X \to Y$ eine Q.I.
Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so groß, dass Y (c,c)-quasi-geodätisch ist und f eine quasi-Isometrie mit c-dichtem Bild.
Seien $x, x' \in X$. Dann existiert nach Vor. eine (c,c)-quasi-Geodäte zwischen $f(x)$ und $f(x')$.

Wir können (mittels Auswahlaxiom) eine Abb. $\tilde{\gamma}: [0,\ell] \to X$ finden s.d. gilt
$\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(\ell) = x'$ und $d_Y(f(\tilde{\gamma}(t)), \gamma(t)) \leq c$ $\forall t$.

Man kann nachrechnen, dass $\tilde{\gamma}$ eine $(c, \max(3c^2, 3))$-quasi-Geodäte ist, die x mit x' verbindet. $\Rightarrow$ X ist quasi-geodätisch.

Um (2) zu zeigen sei OE Y quasi-hyperbolisch und $X \xrightarrow{f} Y$ QI. Dann ist mit (1) X ebenfalls quasi-geodätisch.
Es existieren also $c \geq 1$, $d \geq 0$ s.d. Y (c,d)-quasi-hyperb. und X (c,d)-quasi-geodätisch ist.

Sei $c' \geq c$, $d' \geq d$ geg. und sei weiter ein (c', d')-quasi-geodätisches Dreieck durch γ_i $i = 1,2,3$ drei quasi-Geodäten aufgespannt.

Das Bild $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ ist ein (c'', d'')-quasi-geod. Dreieck in Y, wobei $c'' \geq c$, $d'' \geq d$.

Die Konstanten c'', d'' hängen nur von c', d' ab.
Weil Y nach Vor (c, d, δ)-quasi-hyperb. ist für ein $\delta > 0$ ist das Dreieck $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f \circ \gamma_3)$ auch δ-dünn.

Man kann nachrechnen, dass gilt:

$$\operatorname{Im}(\gamma_1) \subset U_{c\delta + cd}(\operatorname{Im}(\gamma_2) \cup \operatorname{Im}(\gamma_3))$$

sowie die permutierten Inklusionen. (Verwende dazu, dass f eine (c,d)-q.i. Einbettg ist.)

$\Rightarrow$ X ist $(c', d', c\delta + cd)$-quasi-hyperbolisch $\square$

<u>Bem</u> Wir haben im Bew von (2) eigentlich gezeigt:

X, Y metr. Räume Y quasi hyperb., X quasi-geodät., dann ist X auch quasi-hyp., wenn eine q.i. Einbettg $f: X \to Y$ existiert.

8.10 Satz

(X,d) geod. metr. Raum. Dann gilt:

X hyperbolisch $\Leftrightarrow$ X quasi-hyperbolisch.

Haben wir diesen Satz gezeigt, so können wir direkt daraus ableiten:

Kor 8.11 ("hyperbolisch" ist QI-Invariante)

X, Y geodätische metr. Räume, $X \simeq_{QI} Y$. Dann gilt: X ist genau dann hyperbolisch, wenn Y hyperbolisch ist.

Beweis: 6.10 liefert: $X \text{ hyp} \overset{6.10}{\Leftrightarrow} X \text{ quasi-hyp}$

$$\Updownarrow 6.9(2)$$

$\square$ Y ~~ist~~ $\text{hypeb.} \underset{6.10}{\Leftrightarrow} Y \text{ quasi-hyp}$

In den Beweis von 6.10 fließt ein, dass quasi-Geodäten in folgendem Sinne "stabil" sind:

8.12 Satz (Stabilität von quasi-Geodäten)

Seien $c, \delta \geq 0$, $b \geq 1$ Konstanten. Dann existiert ein $k = k(c,b,\delta) \geq 0$ s.d. gilt:

Ist X ein δ-hyp. Raum, $\gamma: [0,l] \to X$ eine (c,b)-quasi-Geodäte, $\gamma': [0,l'] \to X$ Geodäte in X mit $\gamma'(0) = \gamma(0)$, $\gamma'(l') = \gamma(l)$, dann gilt:

$$\mathrm{Im}(\gamma') \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma))$$

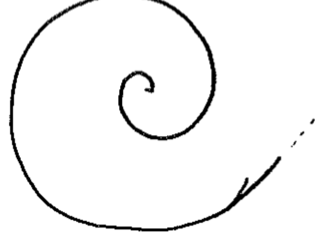
"Trapping"

und $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma'))$.

8.13 Bem

(1) Satz 6.11 sagt, dass (c,d)-quasi-Geodäten immer uniform nah an Geodäten sind.

(2) Die Vor. „X ist δ-hyperbolisch" ist hierfür wesentlich!
In $(\mathbb{R}^2, d_{eukl})$ ist die logarithmische Spirale ein quasi-geodätischer Strahl in $(\mathbb{R}^2, d_{eukl})$, der aber nicht endl. Abst. zu einer Geodäten (= Geraden) in $\mathbb{R}^2$ hat.



← windet sich immer weiter von <u>jeder</u> Geraden weg.

⇝ vergl. ÜA.

<u>Wir beweisen 8.10:</u>

„$\Leftarrow$" X quasi-hyperb. $\Rightarrow$ X hyperbolisch, da jedes geodätische Dreieck auch ein quasi-geodätisches Dreieck ist.

„$\Rightarrow$" Sei X δ-hyperb. für ein $\delta \geq 0$.
Seien (c, b, δ) wie in 6.11 gegeben.
<u>Wir zeigen</u>: $\exists \delta' \geq 0$ s.d. X (c, b, δ')-q.h. ist.

Sei dazu $\Delta = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ein (c,b)-quasi-geod. Dreieck in X. Weil X geodätisch ist, existieren Geodäten γ_i' mit den selben Anfangs- und Endpkten, wie γ_i $i = 1,2,3$.

X hyperb. $\Rightarrow$ Das Dreieck $\Delta' = (\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ ist δ-dünn. Mit 6.11 folgt dann:

$$\left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstante}}}{\exists k} \text{ s.d. } \begin{array}{l} \mathrm{Im}(\gamma_i') \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i)) \ \forall i \text{ und} \\ \mathrm{Im}(\gamma_i) \subset U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i')) \ \forall i \end{array} \right] \otimes$$

$\rightsquigarrow$ Wir schachteln dieses Wissen mit der δ-Umg., die wir aus der δ-hyperbolisch-Eigenschaft von X (vergl 6.2) erhalten.

$$X \ \delta\text{-hyp.} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geodäte in } X}}{\mathrm{Im}(\gamma_i')} \subset U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j') \cup \mathrm{Im}(\gamma_l')) \\ \qquad\qquad\qquad \forall \{i,j,l\} = \{1,2,3\} \end{array} \right] \otimes\!\!\otimes$$

$$\otimes \ \& \ \otimes\!\!\otimes \Rightarrow \mathrm{Im}(\gamma_i) \overset{\otimes}{\subset} U_k(\mathrm{Im}(\gamma_i'))$$
$$\subset U_k(U_\delta(\mathrm{Im}(\gamma_j') \cup \mathrm{Im}(\gamma_l')))$$
$$\subset U_{2k+\delta}(\mathrm{Im}(\gamma_j) \cup \mathrm{Im}(\gamma_l))$$

Also ist X ~~$2k+\delta$ - dünn bzw.~~ $(c, b, 2k+\delta)$-quasi-hyperbolisch. $\square$

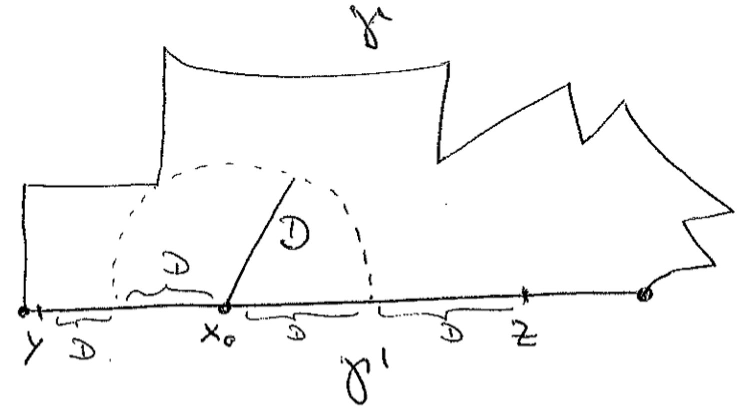
Fehlt also noch der Beweis von **8.12**: Stabilität der quasi-Geodäten.

Beweis-Skizze 8.12:

Sei $\gamma : [0,l] \to X$ eine (c,b)-quasi-Geodäte
$\gamma' : [0,l'] \to X$ Geodäte mit selben Anfangs- & Endpkten.

$$D := \sup\{\, d(x, \mathrm{Im}(\gamma)) \mid x \in \mathrm{Im}(\gamma') \,\} = \max\{ \dots \}$$

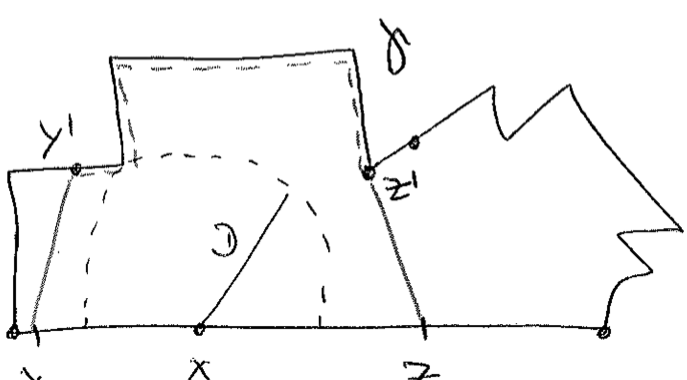
weil $\gamma'([0,l])$ kompakt



1. D nach unten abschätzen:

Wähle y und z Pkte auf γ' mit Abst $2D$ zu x_0 (bzw. $y = \gamma'(0)$ und $z = \gamma'(l')$.)

Wähle y', z' auf γ mit $d(y,y') \le D$ und $d(z,z') \le D$.



— geodät. Segmente $y \rightsquigarrow y'$ & $z \rightsquigarrow z'$

$\sigma = y \circ\!\!-\!\!-\!\!\circ \underbrace{- - - -}_{\text{auf } \gamma} \circ\!\!-\!\!-\!\!\circ z$ ist Pfad $y \rightsquigarrow z$

Man kann zeigen:

$$D \underset{\sigma \text{ vermeidet } D\text{-Ball um } x_0}{\le} d(x_0, \mathrm{Im}(\sigma)) \overset{X\ \delta\text{-hypb.}}{\le} \delta \cdot |\log_2(l(\sigma))| + 1$$

für bel. (stetige) Kurven

$$\Rightarrow \quad d(y',z') \le d(y',y) + d(y,z) + d(z,z') \qquad (*)$$
$$\le \quad D \quad + \quad 4D \quad + \quad D \quad = 6D$$

außerdem ist $l(\sigma) \le \underbrace{c \cdot d(y',z') + b}_{\text{Teil in quasi-geod. } \gamma} + 2D$

wir verwenden (*) $\rightarrow \; \le c \cdot 6D + b + 2D$

kann man allgemein für quasi-Geodäten zeigen

$$\Rightarrow \quad D \le \delta \cdot |\log_2(l(\sigma))| + 1$$

$$\Rightarrow \quad D - 1 \le \delta \cdot |\log_2(D(6c+2)+b)|$$

linear vs logarithmisch

$\log_2$ wächst langsamer als $D-1$
$\Rightarrow$ D muss uniform durch ein $D_0 = D_0(c,b,\delta)$ beschränkt sein.

Man muss dann noch mit ähnlichen Überlegungen zeigen, dass $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U_{\tilde{D}}(\mathrm{Im}(\gamma'))$ für ein $\tilde{D} = \tilde{D}(D_0, c, b) = \tilde{D}(c, b, \delta)$.

Vergleiche dazu den Link zu Clara Löh's Skript. $\square$

8.14 Def. hyperbolische Gruppen

Eine endlich erzeugte Gruppe G heißt (Gromov) hyperbolisch, falls für ein (und damit jedes) Erzeugendensystem S, $|S|<\infty$, von G der Caylaygraph $(Cay(G,S), d_S)$ ein hyperbolischer metr. Raum ist.

Aus der Eigenschaft, dass "hyperbolisch" QI-invariant ist, folgt direkt:

8.15 Satz

G, H endl. erzeugt; ist $G \sim_{QI} H$ so gilt:
G hyperbolisch $\Leftrightarrow$ H hyperbolisch.

8.16 Bsp. 0) endl. Gruppen sind hyperbolisch.

1) $(\mathbb{Z},+)$ ist hyperbolisch (weil QI zu $(\mathbb{R},+)$)

2) $(\mathbb{Z}^k,+)$ ist für $k\geq 2$ nicht hyperbolisch.
(weil $\mathbb{R}^2$ nicht hyperbolisch ist).

3) freie Gruppen sind hyperbolisch

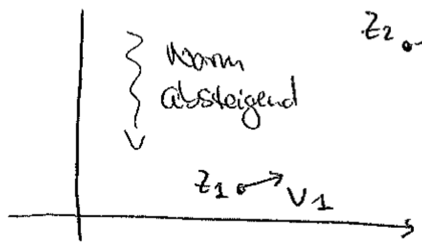
4) kokompakte, diskrete UG von $PSL_2\mathbb{R}$ sind hyperbolisch (weil diese q.i. zu $\mathbb{H}^2$ sind). z.B. $PSL_2\mathbb{Z}$.

Bsp 8.17 $PSL(2,\mathbb{R}) \circlearrowright \mathbb{H}^2$
$PSL(2,\mathbb{Z}) \circlearrowright \mathbb{H}^2$

Oberes Halbebenenmodell für $\mathbb{H}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$
$$\cong \{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}.$$

- Riemannsche Struktur $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$
- hyp. Norm für Tangentialvektoren
  $v \in T_z\mathbb{H}^2 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ $\qquad \|v\|^{hyp} := \dfrac{\|v\|^{eukl}}{\operatorname{Im} z}$



mit $\|v_1\| = \|v_2\|$

- Länge einer diff'baren Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$:
  $$L_{hyp}(\gamma) := \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|^{eukl}}{y(t)}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}\, dt$$

  $$\gamma(t) = x(t) + i \cdot y(t)$$

Möbiustransformationen (MT)

Eine MT ist eine Abb. von $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert durch:

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\infty \longmapsto \frac{a}{c}, \quad -\frac{d}{c} \longmapsto \infty$$

für feste $a,b,c,d \in \mathbb{C}$.

Man kann zeigen:

1) MT sind 3-fach transitiv, d.h. $\forall\ z_1, z_2, z_3$ und w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ existiert genau eine MT T mit $T(z_i) = w_i \quad i = 1,2,3$.

2) MT bilden Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab.

3) $PSL(2,\mathbb{R}) := SL(2,\mathbb{R})/_{\pm \mathbb{1}}$ wirkt auf $\mathbb{H}^2$ durch MTs:

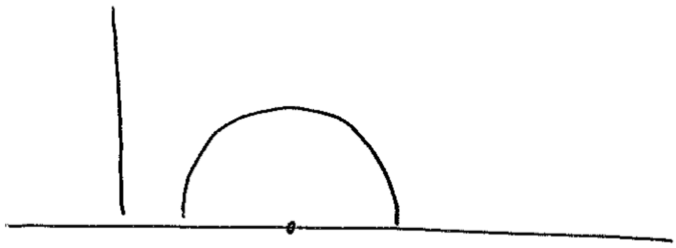
$$\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{g}, z\Big) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} =: g \cdot z$$

ist $\operatorname{Im}(z) > 0$ so ist $\operatorname{Im}(g \cdot z) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$.

4) Diese Wirkung aus 3) ist isometrisch und $PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^2)$ ist injektiv.

$\boxed{\text{ÜA}}$

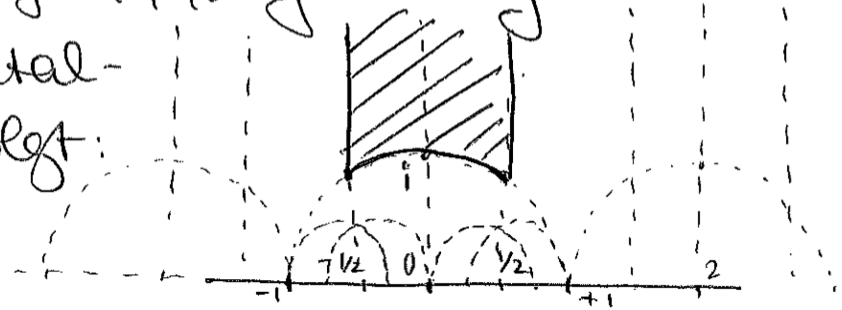
5) Geodäten in $\mathbb{H}^2$:



6) $PSL(2,\mathbb{Z})$ wirkt eigentlich diskontin. auf $\mathbb{H}^2$

Einträge a, b, c, d ganzzahlig

mit Fundamentalbereich wie folgt:



Eine lange Bem. zu nicht-Bsp:

8.18. Bem: nicht-Bsp. für hyperb. Gruppen

Wir hatten gesehen: $\mathbb{Z}^2 \sim_{QI} \mathbb{R}^2 \leftarrow$ nicht hyperb.

also ist $\mathbb{Z}^2$ nicht hyperb.

wegen der Möglkt Dreiecke immer größer zu skalieren

diese Idee kann allgemeiner für UG $H \leq G$ gefasst werden:

ÜA

> erzeugt $S_H \subset S_G$ (endlich) H bzw G, so gilt
> $d_H(1,h) \geq d_G(1,h) \quad \forall h \in H.$
> (d_H: Wortmetrik bzgl S_H; d_G: bzgl S_G)
>
> Gilt auch $\dfrac{d_H(1,h)}{d_G(1,h)} \leq C =$ konst, unabhg von h
>
> (d.h. H ist in G "undistorted"), dann gilt:
>
> ist $H \cong \mathbb{Z}^2$, so ist G nicht hyperbolisch.

Überraschenderweise gilt:

8.19 Satz über die verbotene UG

> Sei G endlich erzeugt mit einer UG $H \cong \mathbb{Z}^2$, so ist G nicht hyperbolisch.

⚠ keine Ann, dass H "undistorted" ist, ist hier nötig.

Beweis-Skizze:

1) Zeige, dass ein Element g unendlicher Ordng eine quasi-Achse besitzt, d.h. eine quasi-Geodäte γ existiert s.d. $g^n\gamma = \gamma \;\forall n$.
2) falls mehrere quasi-Achsen existieren, so sind sie paarweise nah beieinander.
3) Sei h von unendl. Ordng und $\langle g,h\rangle \cong \mathbb{Z}^2$. (d.h. g und h kommutieren insbes.)
   $\Rightarrow$ h permutiert die quasi-Achsen von g
4) zeige: der Zentralisator von g ist virtuell $\mathbb{Z}$

aber: $\langle g\rangle$ hat in $\mathbb{Z}^2 \cong \langle g,h\rangle$ unendlichen Index und $\langle g\rangle \leq C(g)$ kann nur endlichen Index haben $\lightning$. $\square$

8.20 Bem.

1) (Moussong) Ist G Coxetergruppe und besitzt G keine UG $\cong \mathbb{Z}^2$, so ist G hyperbolisch.
2) Für $\pi_1(M^3)$ M^3 = 3-dim npc Mfkt ist $\mathbb{Z}^2$-UG auch die einzige Obstruktion für Hyperbolizität.
3) i.A. ist es offen, ob UG $\cong \mathbb{Z}^2$ das einzige Hindernis für Hyperbolizität ist.