# Übungsblatt 3

25. November 2019
Ping-pong, Cayley-Graphen, Gruppen und metrische Räume

## Präsenzaufgaben (zur Bearbeitung in der Übungsgruppe)

### Aufgabe P1

Es seien $G$ eine Gruppe und $X$ eine Menge, auf der $G$ wirkt. Gegeben sind Elemente $a, b \in G$ und nicht-leere Teilmengen $A, B \subset X$ mit der Eigenschaft, dass $a \cdot B \subset A$ und $b \cdot A \subset B$. Enthält $G$ eine freie Gruppe? Warum (oder warum nicht)?

### Aufgabe P2

Welche freie Gruppen enthält die Gruppe $G := \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$?

### Aufgabe P3

Sei $G$ eine Gruppe mit einem endlichen Erzeugendensystem $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Zeigen Sie, dass $G$ mit der Wortlänge $d_S$ bzgl. $S$ ein metrischer Raum bildet, wobei

$$d_S(g,h) = \begin{cases} 0, & \text{falls } g = h \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \ldots, s_n \in S \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_n\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

### Aufgabe P4

Für ein gewähltes $n$ zeichnen Sie die Cayleygraphen der Diedergruppe $D_n$ bzgl. der beiden Präsentierungen $\langle r, s \mid r^n, s^2, srsr \rangle$ (*Rotation + Spiegelung*) und $\langle s_1, s_2 \mid s_1, s_2^2, (s_1 s_2)^n \rangle$ (*Zwei Spiegelungen*). Sind die entstehenden Räume isometrisch? Was haben sie gemeinsam? Wie sehen die Bilder „aus der Weite“ aus?

### Aufgabe P5

Beweisen Sie **6.4** aus den Vorlesungsnotizen, also:

**a)** Die Verkettung von quasi-isometrischen Einbettungen (bzw. quasi-Isometrien) ist wieder eine quasi-isometrische Einbettung (bzw. eine quasi-Isometrie).

**b)** Eine quasi-isometrische Einbettung ist genau dann eine quasi-Isometrie, wenn sie eine quasi-Inverse besitzt.

**c)** Quasi-isometrisch zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

### Aufgabe P6

Zeichnen Sie die Cayleygraphen von $\mathbb{Z}$ bzgl. der beiden Erzeugendensysteme $\{1\}$ und $\{2, 3\}$. Sind die entstehenden Räume isometrisch? Quasi-isometrisch? Was haben sie gemeinsam? Wie sehen beide „aus der Weite“ aus?

## Hausaufgaben (Geben Sie Ihre Lösung spätestens zum Anfang der nächsten Übungsgruppe ab.)

### Aufgabe H1

**(Lie-Gruppen)** Die (reelle) Heisenberg-Gruppe ist die Matrizengruppe

$$H_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die obige Gruppe bildet also einen metrischen Raum, indem man $H_3(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (zusammen mit der Euklidischen Metrik) identifiziert. Zeigen Sie, dass die ganzzahlige Heisenberg-Gruppe

$$H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

eigentlich-diskontinuierlich auf $H_3(\mathbb{R})$ wirkt. Ist die Wirkung auch ko-beschränkt?

### Aufgabe H2

**(Exakte Folge mit Schnitt)** Sei $1 \hookrightarrow N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q \twoheadrightarrow 1$ eine kurze exakte Folge. Zeigen Sie, dass $G$ ein semi-direktes Produkt von $N$ und $Q$ ist, wenn der Quotient $Q$ eine freie Gruppe ist.

### Aufgabe H3

**(Endliche Stabilisatoren)** Sei $X$ ein metrischer Raum, auf dem eine Gruppe $G$ eigentlich-diskontinuierlich (und durch Isometrien) wirkt. Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in X$ der Stabilisator $G_x = \mathrm{Stab}_G(x)$ eine endliche Untergruppe von $G$ ist.

### Aufgabe H4

**(Gruppen, die nicht quasi-isometrisch sind)** Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

**a)** Die freie Gruppe $F_n$ mit $n \geq 2$ ist nicht quasi-isometrisch zu $\mathbb{Z}$.

**b)** Ist $m \neq n$, so sind $\mathbb{Z}^m$ und $\mathbb{Z}^n$ nicht quasi-isometrisch.