Übungsblatt 4

16. Dezember 2019
Quasi-Isometrien, Geodäten, Hyperbolizität

Präsenzaufgaben (zur Bearbeitung in der Übungsgruppe)

Aufgabe P1

In der Vorlesung wurde der Zusammenhang zwischen dem Torus und der Euklidischen Ebene vorgestellt. Geben Sie weitere Beispiele von Flächengruppen mithilfe Polygone und Ankleben der Seiten. Können Sie raten, welche solcher Flächengruppen hyperbolisch sind?

Aufgabe P2

Ein metrischer Raum X wird ein $\mathbb{R}$-*Baum* genannt, wenn alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Es gibt genau ein geodätisches Segment $[x, y] \subset X$ von x nach y.
- Ist $[x, z] \cap [z, y] = \{z\}$, so gilt $[x, z] \cup [z, y] = [x, y]$.

Überlegen Sie sich für die folgenden Räume, ob sie $\mathbb{R}$-Bäume sind:

a) Simpliziale Bäume mit der kombinatorischen Metrik;

b) $\mathbb{R}^2$ mit der natürlichen Euklidischen Metrik;

c) Noch einmal $\mathbb{R}^2$ aber nun mit der Metrik d, die wie folgt definiert wird:

$$d((a,b),(c,d)) = \begin{cases} |b| + |c-a| + |d|, & \text{falls } a \neq c \\ |d-b| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe P3

Betrachten Sie die logarithmische Spirale in der Ebene $\mathbb{R}^2$ (mit der natürlichen Euklidischen Metrik), d.h. die Kurve $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(\theta) = (\theta\cos(\ln(1+\theta)), \theta\sin(\ln(1+\theta)))$. Zeigen Sie, dass γ ein quasi-geodätischer Strahl ist. Hat γ eindlichen Abstand zu einer Geodäten in $\mathbb{R}^2$?

Hausaufgaben (Geben Sie Ihre Lösung spätestens zum Anfang der nächsten Übungsgruppe ab.)

Aufgabe H1

Es seien G eine Gruppe mit Erzeugendensystem S und Wortmetrik d_S und H eine Untergruppe von G, die eine Teilmenge $T \subset S$ als Erzeugendensystem besitzt. In H betrachtet man die Wortmetrik d_T. Zeigen Sie:

a) $d_T(1,h) \geq d_S(1,h)$ für alle $h \in H$.

b) Wenn H isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist und es eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\frac{d_T(1,h)}{d_S(1,h)} \leq C$ für alle $h \in H$, dann ist G nicht hyperbolisch.

c) Die folgende "arithmetische" Heisenberg-Gruppe

$$H_3(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \right\}$$

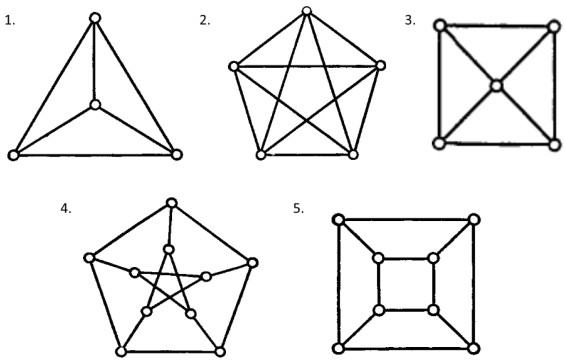
ist nicht hyperbolisch. (Hier ist $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ der ganzzahlige Ring des algebraischen Körpers $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, also $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.)

Aufgabe H2

Beweisen Sie, dass ein metrischer Raum genau dann ein $\mathbb{R}$-Baum ist, wenn er $0-$hyperbolisch ist.

Aufgabe H3

Bestimmen Sie, welche der folgenden Graphen Cayley-Graphen von Gruppen sein können. Begründen Sie dabei Ihre Antwort. Welche der entstandenen Gruppen sind hyperbolisch?



Aufgabe H4

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) hyperbolische Räume. Geben seien zwei Punkte $p_1 \in X_1$ und $p_2 \in X_2$. Definiere einen Raum Y wie folgt: Y besteht aus der disjunkten Vereinigung von X_1 und X_2 zusammen mit der Identifizierung von p_1 mit p_2. (Man klebt also X_1 an X_2 zusammen an den Stellen p_1 und p_2.) Notation: $Y = (X_1 \bigsqcup X_2)/p_1 \sim p_2$. Ferner wird in Y die folgende Metrik definiert.

$$\text{Für } x \in X_i, y \in X_j,\ d(x,y) := \begin{cases} d_i(x,y), & \text{falls } i = j \\ d_i(x,p_i) + d_j(y,p_j), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (Y, d) ein hyperbolischer Raum ist.