Übungsblatt 2

Abgabe: Donnerstag, den 26.10.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 2.1

Seien M, N endliche Mengen.
Wie viele Abbildungen $f : M \to N$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv?
Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2.2

Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Wenn $g \circ f : A \to C$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

b) Wenn $g \circ f : A \to C$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

Zeigen Sie, dass die Umkehrungen dieser Aussagen nicht richtig sind.

Aufgabe 2.3

Überprüfen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.
Welche dieser Relationen sind Äquivalenzrelationen?

a) Ein Schauspieler steht in Besetzungsrelation zu einem anderen, wenn es einen Film gibt in dem beide mitgespielt haben.

b) Seien $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \neq 0$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn xy eine Quadratzahl ist (d. h. $xy = m^2$ für ein $m \in \mathbb{Z}$).

c) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Es gelte $x \sim y$ genau dann, wenn x und y gerade sind.

Aufgabe 2.4

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass dann eine Menge Y und eine Abbildung $f : X \to Y$ existieren, so dass sich die Relation für $x_1, x_2 \in X$ schreiben lässt als $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 2.5

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils zusammen mit der gegebenen Verknüpfung eine Gruppe bilden.

a) $(\mathrm{S}(M), \circ)$, die Menge der bijektiven Abbildungen einer beliebigen Menge M auf sich selbst zusammen mit der Komposition (Hintereinanderausführung) von Abbildungen.

b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, die Menge der ganzen Zahlen mit der üblichen Multiplikation.

c) $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \Delta)$, die nichtnegativen reellen Zahlen mit dem Abstand $x \Delta y := |x - y|$.