

Übungsblatt 6

Abgabe: Donnerstag, den 23.11.2017, vor der Vorlesung.

Bitte lösen Sie die Aufgaben auf verschiedenen Blättern und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, Matrikelnummer und ihren gewählten Übungstermin.

Aufgabe 6.1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

- a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.
- b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
- d) $\{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$.
- f) $\{A \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R}) : A \text{ ist in Zeilenstufenform}\} \subset \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$.

Aufgabe 6.2

Seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w),$$

ebenfalls zu einem K -Vektorraum wird.

Aufgabe 6.3

Ist X eine nichtleere Menge, V ein K -Vektorraum und $\text{Abb}(X, V)$ die Menge aller Abbildungen von X nach V , so ist auf $\text{Abb}(X, V)$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall x \in X$$

eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt.

Zeigen Sie, dass $\text{Abb}(X, V)$ mit diesen Verknüpfungen zu einem K -Vektorraum wird.

(Bitte umblättern!)

Aufgabe 6.4

Sei K ein Körper. Auf $\text{Mat}(2 \times 2; K)$, der Menge der 2×2 Matrizen über K , sei die elementweise Addition

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

und folgende Multiplikation gegeben.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob $(\text{Mat}(2 \times 2; K), +, \cdot)$ ein Ring ist. Falls ja, prüfen Sie ob er kommutativ ist, ob er ein Einselement besitzt und ob er ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 6.5

Sei $K = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Man betrachte den Vektorraum $V = K^3$ und darin die Teilmengen

$$E_0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0}\},$$
$$E_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 + x_2 + x_3 = \bar{1}\}.$$

- Wie viele Elemente haben die Mengen?
- Welche dieser Mengen sind Untervektorräume von V ?
- Bonus: Was für ein Zusammenhang besteht zwischen den Mengen?