

Klausur: Mathematische Methoden I Gruppe A

Aufgabe 1 (6+3+1 Punkte)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 3 & -a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Ermitteln Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lösbar ist. Für welche a gibt es genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antworten.
- b) Lösen Sie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ für $a = -2$.
- c) Beurteilen Sie, ob ein homogenes lineares Gleichungssystem immer lösbar ist.

Aufgabe 2 (5+2+3 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom p mit $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x$.

- a) Schreiben Sie p als Produkt linearer und quadratischer Faktoren, wobei die quadratischen Faktoren keine Nullstellen haben.
- b) Geben Sie die Nullstellen, Polstellen und hebbaren Definitionslücken der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{x(x+1)^2(x+2)}$ an.
- c) Geben Sie, falls möglich, jeweils ein Polynom $q \neq 0$ mit den folgenden Eigenschaften an. Falls es kein solches Polynom gibt, begründen Sie dies.
 - 1) q hat die 100-fache Nullstelle 0.
 - 2) q hat Grad 4 und die doppelten Nullstellen -2 und 1 .
 - 3) q hat Grad 3 und keine Nullstelle.

Aufgabe 3 (2+2+6 Punkte)

Gegeben seien Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 - x$ und $g(x) = |x + 2|$.

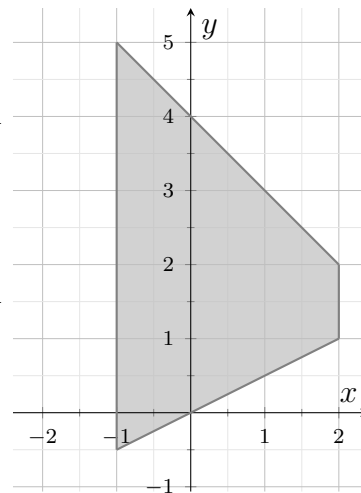
- a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen f und g .
- b) Untersuchen Sie, ob g surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Geben Sie die Funktionen $h_1 = g \circ f$ und $h_2 = f \circ g$ an. Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich sowie die Nullstellen der Funktionen h_1 und h_2 .

Aufgabe 4 (3+7 Punkte)

- a) Beschreiben Sie den rechts eingefärbten Teilbereich der (x, y) -Ebene in der Form

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit geeigneten Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



- b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$\frac{2x}{x-1} \geq x.$$

Aufgabe 5 (2+3+5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 1}{-3n^2 + n - 4}$.

- b) Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k}$.

- c) Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{2x} - c & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist.