

## Klausur: Mathematische Methoden I Gruppe B

### Aufgabe 1 (6+3+1 Punkte)

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -c \\ 1 & 0 & -c \\ 2 & 3 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Ermitteln Sie, für welche  $c \in \mathbb{R}$  das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lösbar ist. Für welche  $c$  gibt es genau eine Lösung? Begründen Sie Ihre Antworten.
- b) Lösen Sie  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  für  $c = -2$ .
- c) Beurteilen Sie, ob ein homogenes lineares Gleichungssystem immer lösbar ist.

### Aufgabe 2 (5+2+3 Punkte)

Gegeben sei ein Polynom  $p$  mit  $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x$ .

- a) Schreiben Sie  $p$  als Produkt linearer und quadratischer Faktoren, wobei die quadratischen Faktoren keine Nullstellen haben.
- b) Geben Sie die Nullstellen, Polstellen und hebbaren Definitionslücken der rationalen Funktion  $f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)^2(x-2)(x+2)}$  an.
- c) Geben Sie, falls möglich, jeweils ein Polynom  $q \neq 0$  mit den folgenden Eigenschaften an. Falls es kein solches Polynom gibt, begründen Sie dies.
  - 1)  $q$  hat die 99-fache Nullstelle 0.
  - 2)  $q$  hat Grad 4 und die doppelten Nullstellen  $-1$  und  $2$ .
  - 3)  $q$  hat Grad 3 und keine Nullstelle.

### Aufgabe 3 (2+2+6 Punkte)

Gegeben seien Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x+1|$  und  $g(x) = 2-x$ .

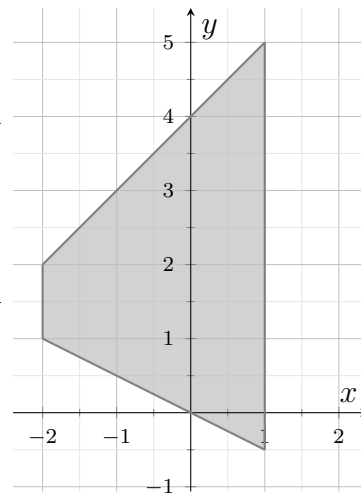
- a) Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen  $f$  und  $g$ .
- b) Untersuchen Sie, ob  $f$  surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Geben Sie die Funktionen  $h_1 = g \circ f$  und  $h_2 = f \circ g$  an. Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich sowie die Nullstellen der Funktionen  $h_1$  und  $h_2$ .

**Aufgabe 4** (3+7 Punkte)

- a) Beschreiben Sie den rechts eingefärbten Teilbereich der  $(x, y)$ -Ebene in der Form

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit geeigneten Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  und Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



- b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Ungleichung

$$\frac{3x}{x-1} \geq x.$$

**Aufgabe 5** (2+3+5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2}{-4n^2 + 2n - 3}$ .

- b) Bestimmen Sie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k}$ .

- c) Bestimmen Sie alle  $a \in \mathbb{R}$ , sodass die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & \text{für } x < 2, \\ \sqrt{2x} + a & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an der Stelle  $x = 2$  stetig ist.