

Übungsblatt H–1

Hausaufgabe

Besprechung und Abgabe 17. April 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Wdh)

Finden Sie Beispiele für

- einen metrischen Raum mit einer offenen und abgeschlossenen (echten) Teilmenge.
- einen metrischen Raum mit einer (echten) Teilmenge, die weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (Metriken)

Auf \mathbb{R}^2 definiere zwei Metriken durch folgende Berechnung des Abstands zweier Punkte $p_1 = (x_1, y_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2)$ aus \mathbb{R}^2 : Sei $d_1(p_1, p_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ die Manhattan Metrik und $d_\infty(p_1, p_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ die Maximumsmetrik.

Zeigen Sie, dass die beiden metrischen Räume (\mathbb{R}^2, d_1) und (\mathbb{R}^2, d_∞) isometrisch sind.

Aufgabe 3 (Isometrische Einbettungen)

Finden Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d) und eine isometrische Einbettung $f : X \rightarrow X$, die keine Isometrie ist.

Aufgabe 4 (Isometrien)

Ist (X, d) kompakter metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine isometrische Einbettung, dann ist f eine Isometrie.

Stimmt die Aussage auch für vollständige metrische Räume? Für lokal kompakte metrische Räume?

Aufgabe 5 (Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine *kontrahierende Abbildung*, d.h. für eine $0 < \lambda < 1$ gilt, dass $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

Zeigen Sie, dass es dann einen eindeutigen Punkt p in X gibt mit $f(p) = p$.