

Übungsblatt H-2

Hausaufgabe

Besprechung und Abgabe 15. Mai 2019, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Neue metrische Räume aus alten)

Lesen Sie sich bitte Kapitel 4 im Vorlesungsaufschrieb über die Konstruktion neuer metrischer Räume aus alten durch (Produkte, κ -Kegel, Verklebungen und sphärischer Join). Beweisen Sie:

- Aussagen (a), (b)*, (c) von Prop 4.3
- Die Verklebung zweier CAT(0) Räume an einer konvexen Teilmenge ist wieder CAT(0). (Stimmt das auch für mehr als zwei Verklebungen? Stimmt das auch für andere Teilmengen?)

* schwierig. Tipp: Schauen Sie mal in das Buch von Bridson und Haefliger über *Metric spaces of non-positive curvature*.

Aufgabe 2 (Geodätische Segmente)

Zeigen Sie, dass das in Satz 5.5 (1) betrachtete geodätische Segment stetig von seinen Endpunkten abhängt.

Verwenden Sie (ohne Beweis): Seien $c, c' : [0, 1] \rightarrow X$ zwei linear reparametrisierte Geodätische mit $c(0) = c'(0)$. Dann existiert für alle $l < D_\kappa$ ein $C = C(l, \kappa)$ für das gilt: $d(c(t), c'(t)) \leq Cd(c(1), c'(1))$.

Aufgabe 3 (Existenz von Geodätischen)

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- Sei (X, d) vollständig und für alle Punkte $x, y \in X$ existiere ein Mittelpunkt, d.h. ein Punkt $m \in X$ für den gilt $d(x, m) = d(m, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$. Zeigen Sie, dass X ein geodätischer Raum ist.
- Zeigen Sie, dass die metrische Vervollständigung eines CAT(0) Raumes wieder geodätisch ist.

Aufgabe 4 (prä-Hilberträume)

Ein normierter Vektorraum ist ein *prä-Hilbertraum*, wenn es eine symmetrische, positiv definite Bilinearform $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass für all $v \in V$ gilt $b(v) = \|v\|^2$. Zeigen Sie:

- a) Ein normierter Vektorraum ist genau dann ein prä-Hilbertraum, wenn die Parallelogrammgleichung gilt, d.h. wenn für alle $u, v \in V$ gilt

$$\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

- b) Ein normierter Vektorraum V ist genau dann CAT(0) bzgl der Metrik $d(x, y) = \|y - x\|$, wenn V ein prä-Hilbertraum ist.

Aufgabe 5 (Projektion auf konvexe Mengen)

Sei (X, d) CAT(0) und C eine vollständige, konvexe Teilmenge in X . Sei $d_C(x) := d(x, C)$. Zeigen Sie:

- a) Für alle $x, y \in X$ gilt $|d_C(x) - d_C(y)| \leq d(x, y)$, d.h. die Funktion d_C vergrößert Abstände nicht.
- b) Sei $S = \{z \in X \mid d(x, z) = r\}$ Sphäre um einen Punkt $x \in X$ vom Radius $r \leq d_C(x)$. Zeigen Sie: Die Einschränkung von d_C auf S nimmt ihr Infimum in einem eindeutigen Punkt y an. Es gilt $d_C(x) = d_C(y) + r$.

Aufgabe 6 (Fixpunktsätze)

Sei (X, d) metrischer Raum. Zeigen Sie:

- a) Zeigen Sie, dass die Menge X^G der Fixpunkte einer isometrischen Gruppenwirkung von G auf X abgeschlossen ist. (Finden Sie gegebenenfalls zunächst heraus, was eine isometrische (links-)Wirkung von G auf X ist.)
- b) Ist X zusätzlich ein CAT(0)-Raum, so ist die Fixpunktmenge X^G einer isometrischen Gruppenwirkung entweder leer oder eine konvexe Menge.