Übungsblatt P–3

Präsenzaufgabe
Besprechung am 17.6. in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Projektionen in CAT(0) Räumen)
Sei X CAT(0) und C eine konvexe Teilmenge in X, die in der induzierten Metrik vollständig ist. Bezeichne mit $\mathrm{proj}_C : X \to C$ die eindeutige Projektion auf C. Dann gilt:

a) Liegt y auf der Geodätischen von x nach $\mathrm{proj}_C(x)$, so ist $\mathrm{proj}_C(y) = \mathrm{proj}_C(x)$.

b) Sei $x \notin C$ und $\mathrm{proj}_C(x) \neq y \in C$. Dann gilt: $\angle_{\mathrm{proj}_C(x)}(x, y) \geq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 2 ($\mathbb{R}$-Bäume)
Ein metrischer Raum (T, d) ist ein $\mathbb{R}$-*Baum*, wenn zu je zwei Punkten x, y in T genau eine Geodätische existiert und die Verkettung zweier Geodätischer wieder eine Geodätische ist, wenn die Verkettung injektiv ist.[1] Zeigen Sie:

a) Jeder $\mathbb{R}$-Baum ist CAT(0).

b) Die Vervollständigung eines $\mathbb{R}$-Baumes ist CAT(0).

c) Der Raum $T = \mathbb{R}^2$ mit folgender Metrik ist CAT(0):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & \text{if } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases}.$$

Aufgabe 3 (Parallelität in CAT(0) Räumen)
Sei (X, d) ein CAT(0) Raum. Zwei Geodätische $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to X$ heißen parallel, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $d(c_1(t), c_2(t)) = d(c_1(0), c_2(0))$. Zeigen Sie, dass Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geodätischen in X ist.

[1] Formal gesagt bedeutet letzteres: für zwei Geodätische $c : [0, t] \to T$ und $c' : [0, t'] \to T$ mit $c(t) = c'(0)$ und $c([0, t]) \cap c'([0, t']) = \{c(t)\}$ ist die Abbildung $\gamma := c' \circ c : [0, t + t'] \to T$ definiert durch $\gamma(s) = c(s)$ für $s \leq t$ und $\gamma(s) = c'(s - t)$ für $t \leq s \leq t' + t$, wieder eine Geodätische.

Aufgabe 4 (untere Krümmungsschranken)

a) Zeigen Sie: Zwei Geodätische c_1 und c_2 in einem CBB(0)-Raum X deren Bilder sich in einem Intervall positiver Länge schneiden sind beide Teilstücke einer (gemeinsamen längeren) Geodätischen c in X.

b) Diskutieren Sie folgende Fragen und Behauptungen:

1. Welche untere Krümmungsschranke hat $\mathbb{R}$?
2. Ein $\mathbb{R}$-Baum ist nicht CBB(0).
3. Welche untere Krümmungsschranken haben Graphen (mit oder ohne Kreise)? Wie sieht es mit oberen Krümmungsschranken aus?