Skript 01 Grundlagen

Donnerstag, 28. März 2019 14:02

Vorlesung

Metrische Geometrie

Sommer 2019

3+1

Wie weit ist es von + nach + ?

Wir werden Geometrie machen (Isometrien, Symmetrien, Krümmungsverhalten ... studieren) in möglichst allgemeinem Setting

→ gleichzeitiges Betrachten diskreter und kontinuierlicher Strukturen

→ abstraktes Setting für viele konkrete Anwendungen

→ Bezüge zu vielen anderen Bereichen

→ verstehen welche Differentialgeom. Konzepte nur von der Metrik aber nicht von differenzierbaren Strukturen abhängen.

Konzepte nur von der Metrik aber nicht von differenzierbaren Strukturen abhängen

<u>Übungen:</u>
- Sind in die Vorlesung integriert. Etwa jede zweite Woche gibt es ein Übungsblatt und/oder Präsenzaufgaben.
- Blätter sind online, Notizen sind online
- bringen Sie sich ein!

Kapitel 1: Grundlagen über metrische Räume

<u>Def 1.1</u> Ein <u>metrischer Raum</u> ist ein Paar (X, d) wobei X eine Menge und d eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei, für die gilt:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (nicht-entartet)

(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (symmetrisch)

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,x)$ (Δ-Ungleichung) $\forall x,y,z \in X$

Die Abb d heißt <u>Metrik</u> auf X, ein Element $x \in X$ heißt <u>Punkt</u> in X, der Wert $d(x,y)$ heißt <u>Abstand</u> von x und y.

<u>Bsp. 1.2</u>

a) diskrete Metrik:

Jede Menge $X \neq \emptyset$ trägt die diskrete Metrik definiert durch

Jede Menge $X \neq \emptyset$ trägt die diskrete
Metrik definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \neq y \\ 0 & \text{wenn } x = y \end{cases}$$

b) Euklidische Räume:
für $n \geq 1$ betrachte $X = \mathbb{R}^n$ mit

$$d_2(x,y) := |x-y| \quad \text{wobei}$$
$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

und $x \in X$ ist ein Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$

c) die selbe Menge kann verschiedene Metriken tragen:
$\mathbb{R}^2$ mit <u>Manhattan-Metrik</u>:

$$d(x,y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| .$$

$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$
wobei $|\cdot|$ Betragsfkt in $\mathbb{R}$ ist.

d) Funktionenraum mit sup-Norm:
Sei X eine Menge und $C_b(X)$ die Menge aller beschränkten, stetiger Funktionen auf X. Dann ist

$$d(f,g) := |f-g|_\infty$$

wobei $|f|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ ← Betragsfkt wobei $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ ← Betragsfkt auf $\mathbb{R}$

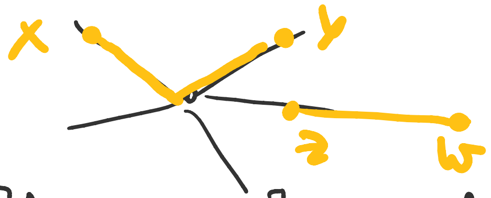
sup-Norm auf $C_b(X)$

eine Metrik auf $C_b(X)$.

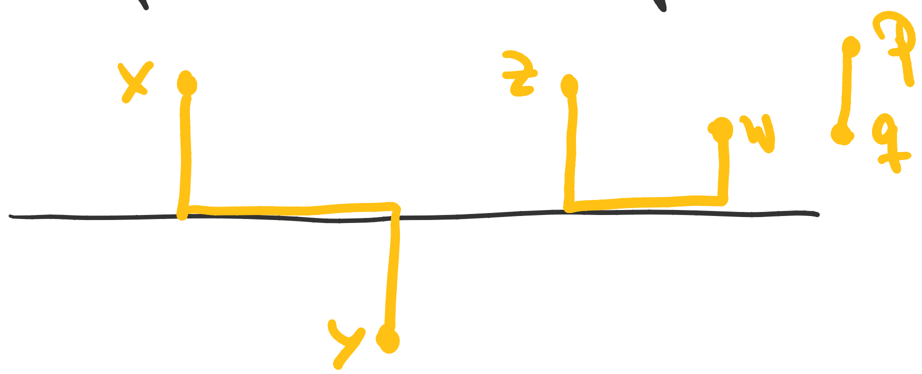
e) eingeschränkte Metrik:
Sei (X, d) metr. Raum. Dann ist $(Y, d|_Y)$ metr. Raum für alle Teilmengen $Y \subset X$.

f) Pariser Metrik auf $\mathbb{R}^n$:

auch SNCF metric



g) Holzfällermetrik auf $\mathbb{R}^2$:



Def 1.3 Isometrie:

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.
Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>isometrische Einbettung</u>, wenn $\forall\, u, v \in X$ gilt: $d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v)$.

Eine bijektive isometrische Einbettung

Eine bijektive isometrische Einbettung nennen wir <u>Isometrie</u>.
Die Isometriegruppe von X ist definiert durch $\mathrm{Iso}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ Isometrie} \}$

<u>Satz 1.4</u> (Kuratowskis Einbettungssatz)
Jeder metrische Raum (X,d) lässt sich isometrisch einbetten in den Banachraum $(C_b(X), |\cdot|_\infty)$.

Um diesen Satz zu zeigen brauchen wir folgende Notation: für ein $x \in X$ schreibe dist_x für die Abbildung $X \to \mathbb{R} : z \mapsto d(x,z)$, d.h. den Abstand zu x.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen, dass die wie folgt definierte Abbildung $K_p : X \to C_b(X)$ eine isometrische Einbettung ist:

$$\underbrace{K_p(x)}_{\text{ist eine Abbildung von } X \to \mathbb{R}} := \mathrm{dist}_x - \mathrm{dist}_p$$

ist eine Abbildung von $X \to \mathbb{R}$.

Es gilt: $d(x,p) \geq |d(x,v) - d(p,v)|$
$$= |K_p(x)(v)|$$

Also ist $K_p(x)$ beschränkt und somit in $C_b(X)$.

Weiter gilt:
$$|K_p(x)(v) - K_p(y)(v)|$$
$$= |d(x,v) - \cancel{d(p,v)} - d(y,v) + \cancel{d(p,v)}|$$
$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x,y).$$

Im Fall $x=v$ oder $y=v$ gilt Gleichheit.
Also ist $|K_p(x) - K_p(y)|_\infty = d(x,y)$. □

Bem: Die Abbildung K_p heißt auch Kuratowski-Einbettung mit Basis p.
Diese Einbettung hängt i.A. von der Wahl von p ab.

Variante 1.5 (ÜA)

Wenn X beschränkt ist, so ist $x \mapsto d(x,-)$ eine isometrische Einbettung von X nach $C_b(X)$.

Korollar 1.6

Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume so existiert ein Banachraum, der zu X und Y isometrische Teilmengen hat.

Beweis: Satz 1.4 und Raum $C_b(X) \oplus C_b(Y)$. □

Wdh?

Wir benötigen noch ein paar Begriffe für den weiteren Verlauf der Vorlesung:

- stetige Abb.
- konvergente Folgen
- abgeschlossene / offene Mengen
- Cauchy-Folgen
- vollständige metr. Räume
- kompakte metr. Räume

Diese werden genau wie in der Analysis definiert.
Def. siehe unten.
Bei Bedarf → Burago-Burago-Ivanov

Def 1.7 Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge $x_1, x_2, \dots$ in X heißt konvergent, wenn es

$x_1, x_2, \ldots$ in X heißt <u>konvergent</u>, wenn es ein $x_\infty \in X$ gibt s.d.

$$d(x_\infty, x_n) \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

D.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq n_0$ gilt

$$d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Wir sagen x_n <u>konvergiert gegen</u> x_∞ und schreiben $x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n$ oder $x_n \to x_\infty$ für $n \to \infty$.

<u>Def 1.8</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u>, wenn für jede konvergente Folge $x_n \to x_0$ in X gilt, dass die Folge $y_n := f(x_n)$ gegen $y_\infty := f(x_\infty)$ konvergiert.

Äquivalent dazu:
$f: X \to Y$ ist stetig, wenn $\forall x \in X$ und $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert s.d.

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

<u>Def. 1.9</u> Eine Teilmenge A in einem metr. Raum X ist <u>abgeschlossen</u>, wenn für eine Folge (x_n) mit $x_i \in A \; \forall i$, die in X

eine Folge (x_n) mit $x_i \in A$ $\forall i$, die in X konvergiert gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Eine Teilmenge Ω in X heißt <u>offen</u> wenn $X \setminus \Omega$ abgeschlossen ist.
Äquivalent dazu: Ω ist offen, wenn für alle $z \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ existiert s.d.

$$B_\varepsilon(z) = \{ x \in X \mid |x - z| < \varepsilon \}.$$

<u>Bem</u> Für jede beliebige Menge Q in X existiert eine minimale abgeschlossene Teilmenge in X, die Q enthält.
Wir nennen sie den <u>Abschluss von Q</u>.

Man erhält den Abschluss von Q

- als den (abgeschl.) Schnitt aller abgeschlossenen Mengen $A \supset Q$ in X oder
- als Menge aller Grenzwerte von beliebigen Folgen in Q.

<u>Def 1.10</u> Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ in (X, d) ist eine <u>Cauchy Folge</u> wenn $\forall \varepsilon > 0$ ein n_0 existiert s.d.

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0.$$

existiert n_0 s.d.

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n,m > n_0 .$$

<u>Def. 1.11</u> Ein metr. Raum heißt <u>vollständig</u>, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

<u>Bsp.</u> $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, d_{eukl})$ sind vollständig.

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ in $\mathbb{R}$ ist nicht vollständig.

<u>Prop 1.12</u> Ist (X, d) vollst. metr. Raum und $A \subset X$. Dann ist $(A, d|_A)$ ein vollst. metr. Raum g.d.w. A abgeschlossen.

<u>Referenz?:</u> Petrunin

<u>Prop. 1.13</u> Sei (X, d) metr. Raum, $Y \subset X$.
Dann gilt:
(1) Ist Y vollständig, dann ist Y abgeschlossen in X.
(2) Ist X vollständig und Y abgeschlossen in X, dann ist Y vollständig.

See BB1 1.5.5 im pdf
Referenz?

Referenz:

Satz 1.14 (Vervollständigung von X)

Für jeden metrischen Raum (X, d) existiert ein vollständiger metrischer Raum $\overline{X}$ s.d. X dicht in $\overline{X}$ ist.
Ist X' ein anderer solcher vollst. Raum, dann existiert eine eindeutige Isometrie $f: \overline{X} \to X'$ mit $f|_X = \mathrm{id}$.

Beweis: (BBI Thm 1.5.10) (Sketch)

Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in X. Definiere:
$$d((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$
Man muss nachrechnen, dass gilt:
entweder ist
$$(d(x_n, y_n)) \text{ eine Cauchy-Folge in } \mathbb{R}$$
oder $d(x_n, y_n) \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$.

Somit ist die Abb. $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine <u>Semi-Metrik</u>, d.h. sie erfüllt alle Bedingungen aus Def 1.1. außer (i).

Definiere $\bar{X} := \mathcal{X}/_{\sim}$ wobei $(x_n) \sim (y_n)$ wenn $d((x_n),(y_n)) = 0$.

Identifiziere X mit seinem Bild in $\bar{X}$ unter der Abb. $x \longmapsto [(x_n)]_{\sim}$ wobei $x_n = x \ \forall n$.

Diese Abb ist abstandserhaltend.
Das Bild ist dicht, weil jeder Pkt in $\bar{X}$ durch eine Folge (x_n) repräsentiert wird und Grenzwert dieser Folge ist (in $\bar{X}$). Wobei die Folge selbst in $X \subset \bar{X}$ lebt. $\square$

Satz 1.15 Banachs Fixpunktsatz

Sei X ein vollständiger metr. Raum, $0 < \lambda < 1$ und $f: X \to X$ eine Abb. mit $d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in X$.

(f vergrößert Abstände nicht).
Dann existiert ein eindeutiges $p \in X$ mit $f(p) = p$.

[redacted]