Skript 02 Geodäten und Längen

Freitag, 29. März 2019 12:01

Kapitel 2 Geodätische metrische Räume

Beschreibung von Räumen in denen Punktepaare durch kürzeste Kurve verbunden werden können.

Def 2.1 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Geodätische ist eine isometrische Einbettung γ eines abgeschlossenen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ nach X.

Ist $I = [0,\infty)$ so heißt γ auch geodätischer Strahl, ist $I = \mathbb{R}$ so nennen wir γ auch (geodätische) Gerade.

Wir nennen eine Abb $c: I \to X$ eine linear reparametrisierte Geodätische, wenn ein $\lambda > 0$ existiert mit

$$d(c(t), c(t')) = \lambda \cdot |t - t'| \quad \forall t, t' \in I.$$

Wir sagen auch: c parametrisiert sein Bild proportional zur Bogenlänge.

sein Bild proportional zur Bogenlänge.

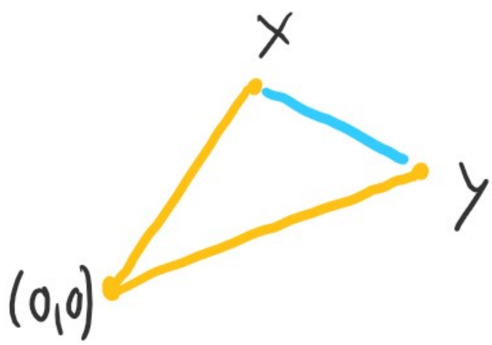
Eine Teilmenge $G \subset X$ ist konvex wenn $\forall x, y \in G$ gilt: x und y können durch eine Geodätische verbunden werden und das Bild jeder(!) Verbindungsgeodätischen ist in G enthalten.
Gilt obige Aussage für alle Punkte $x, y \in G$ mit $d(x,y) < r$ so nennen wir G auch r-konvex.

Bem: $c: I \to \mathbb{R}$ Geodätische heißt:
$$d(c(t), c(t')) = |t - t'| \quad \forall t, t' \in I.$$

Bsp. 2.2 1) Bekanntestes Bsp. für einen eindeutig geodätischen metr. Raum ist der euklidische Raum $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, d)$ mit $d(x,y) = \|x - y\|$.
vergl. auch Prop. 2.5
Die (eindeutige) Geodätische zwischen x und y ist gegeben durch $(1-t)x + y$ $\forall 0 \leq t \leq 1$.
Konvex im obigen Sinn ist äquiv. zur linearen Konvexität.

zur linearen Konvexität.

2) Betrachte: $X=\mathbb{R}^2$, $d=$ Pariser Metrik



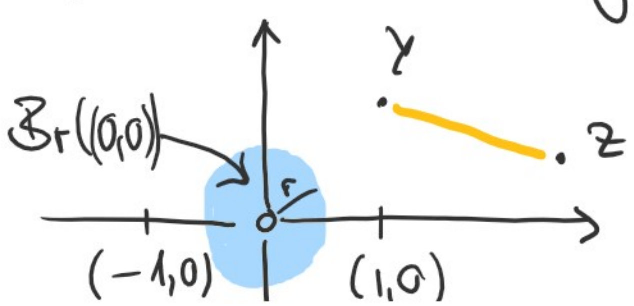
— = Geodätische von x nach y

— ist nicht isometrisches Bild eines Intervalls

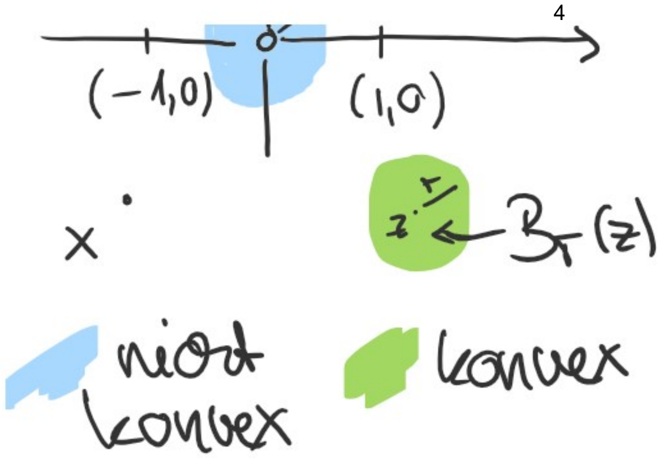
- Einheitsball um (0,0) sieht aus wie immer (und ist konvex).
- Mengen, die (0,0) nicht enthalten sind nur konvex, wenn sie aus genau einem (oder keinem) Pkt oder einem Intervall auf einer Ursprungsgeraden bestehen.

2) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}=:X$, $d=d_{eukl}|_X$

dann gibt es zwischen $x=(-1,0)$ und $y=(1,0)$ keine Geodätische.



Auch nicht zw. x und y, aber z.B. zwischen y und z



y und z ($\hat{=}$ übliche Strecke im eukl. Raum zw. y und z)

Def 2.3 Eine lokale Geodätische in einem metr. Raum X ist eine Kurve $c: I \to X$, $I \subset \mathbb{R}$, s.d. gilt:

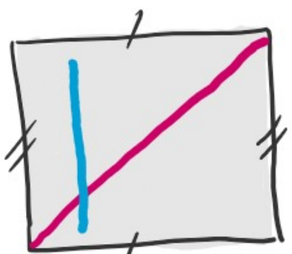
$\forall t \in I \ \exists \varepsilon > 0$ mit

$$d(c(t'), c(t'')) = |t' - t''|$$

für alle $t, t' \in I$ mit $|t' - t| + |t'' - t| < \varepsilon$.

M.a.W. Eine lokale Geodätische ist eine Kurve s.d. $\forall t \in I$ gilt: in einer kleinen Umgebung von t ist die Kurve Geodätische.

Bsp 2.4 für lokale Geodätische:

$T =$  $= [0,1] \times [0,1] / \sim$

mit $(0,y) \sim (1,y) \ \forall y$

und $(x,0) \sim (x,1) \ \forall x$

flat Torus

flat Torus  mit $(0,y) \sim (1,y)$ $\forall y$ und $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x$

Die Kurven $t \longmapsto (t,t)$ für $t \in [0,1]$ oder $t \longmapsto (a,t)$ für $t \in [\frac{1}{8}, \frac{7}{8}]$ sind lokale (aber nicht global) Geodätische.

Im Bsp. 2.2 1) haben wir aus der euklidischen Norm eine Metrik gemacht. Das geht immer!
Sei im folgenden ein normierter VR immer ein <u>reeller</u> normierter VR.
Geg. eine Norm $\|\cdot\|$ auf V so ist $d(x,y) := \|y-x\|$ eine Metrik auf V.
Die Δ-Ungl. folgt aus der Tatsache dass $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ ist $\forall v,w \in V$.

Man nennt V einen <u>Banachraum</u>, wenn die so zur Norm assoziierte Metrik vollständig ist.

<u>Prop. 2.5</u> Jeder normierte VR V ist ein vollständiger metrischer Raum

Prop. 2.5 Jedes normierte VR V ist ein geodätisches metrisches Raum. (mit eines durch die Norm induzierten Metrik).
Des metr. Raum V ist eindeutig geodätisch genau dann, wenn der Einheitsball $\overline{B}_1(0)$ strikt konvex ist.

d.h. seien $u_1 \neq u_2$ zwei Vektoren mit Norm 1. Dann gelte:
$\|(1-t)\cdot u_1 + t u_2\| < 1$
$\forall t \in (0,1)$.

Beweis: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass $c:[0,1] \to V$ mit
$c(t) := (1-t)\cdot u + t\cdot v$ eine linear reparametrisierte Geodäte von u nach v ist für beliebige u,v in V.
Somit ist V geodätisch. Bezeichne mit $[u,v]$ das Bild von $[0,1]$ unter c in V.
Um zu zeigen, dass V eindeutig geodätisch ist, müssen wir nachrechnen:

geodätisch ist, müssen wir nachrechnen:

geg u, v, w in V.

Gilt $d(u,v) + d(v,w) = d(u,w)$ so folgt $v \in [u,w]$. $(*)$

V eind. geod. $\Leftrightarrow (*)$

Setze $v_1 := v - u$ und $v_2 := w - v$ dann ist V geodätisch g.d.w.

$$\|v_1\| + \|v_2\| = \|v_2 + v_1\|$$

impliziert, dass $\underbrace{v \in [u,w]}$

d.h. $v = (1-t)u + tw$ für ein $t \in [0,1]$.

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\|v_1\| + \|v_2\| > \|v_2 + v_1\|$ für linear unabhängige v_1 und v_2.

Schreibe jetzt $v_i = a_i u_i$ mit $a_i := \|v_i\|$ und sei $t = \frac{a_1}{a_1+a_2}$, dann gilt:

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1+a_2} \cdot u_1 + \frac{a_2}{a_1+a_2} u_2 \right)$$

$$= (a_1 + a_2) \cdot \left(t \cdot u_1 + (1-t) \cdot u_2 \right)$$

Somit gilt:

$$\|v_1+v_2\| < \|v_1\| + \|v_2\|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\|t u_1 + (1-t) u_2\| < 1}_{\text{das war zu zeigen!}}$$

Also liegt das Geradenstück zwischen u_1 und u_2 im Einheitskreis und dieser ist strikt konvex. $\square$

Eine weitere Beispielklasse:
metrische Graphen (BH p7, 1.9)
(einfachste Klasse, die nicht Mfkten sind)

Def 2.6: Graphen (kombinatorisch)

Ein (kombinatorisches) Graph Γ ist ein Tupel $\Gamma = (V, E)$ zweier (potentiell unendliches Mengen, den Ecken V und Kanten E zusammen mit zwei

Abbildungen $\delta_0 : E \to V$ und $\delta_1 : E \to V$, den Endpunkt-Abbildungen

$\delta_1: E \to V$, den Endpunkt-Abbildungen, die jeder Kante ihre beiden Enden zuordnen. Anm: $V = \mathrm{im}(\delta_0) \cup \mathrm{im}(\delta_1)$

Um einen Graphen als metrischen Raum aufzufassen müssen wir zunächst jeder Kante eine Länge zuordnen. Dies wird durch die Abb l in der nächsten Definition erledigt.

Def. 2.7 (Realisierung eines Graphen) (als topologischer Raum)

Sei Γ kombinatorischer Graph. Setze $X_\Gamma := (E \times [0,1])/_\sim$ wobei $\sim$ die durch folgende Relation erzeugte Äquivalenzrelation sei:

$(e,i) \sim (e', j)$ für $e, e' \in E$, $i,j \in \{0,1\}$ wenn gilt $\delta_i(e) = \delta_j(e')$.

Wir identifizieren die Ecken V von Γ mit dem Bild von $E \times \{0,1\}$ in X_Γ unter der Quotientenabb.

$$p: E \times [0,1] \longrightarrow X_\Gamma.$$

Weiter betrachte $\forall e \in E$ eine Abb.

$l_e : [0,1] \longrightarrow X_\Gamma \; ; \; t \longmapsto p(e,t)$

$f_e : [0,1] \to X_\Gamma : t \mapsto p(e,t)$.

Wir nennen X_Γ die <u>topologische Realisierung</u> von Γ und f_e <u>Kantenabb.</u> von e.

<u>Bem:</u>
- f_e ist injektiv auf $(0,1)$ $\forall e \in E$.
- ist $f_e(0) = f_e(1)$ so nennen wir e <u>Schleife</u>.

Wir konstruieren jetzt eine <u>Metrik auf X_Γ</u>:
zunächst ordnen wir jeder Kante e mittels einer (fest gewählten) Abb $\lambda : E \to (0,\infty)$ eine Länge $\lambda(e)$ zu.

<u>Def 2.8</u> (stückw. lineare Pfade)

Ein <u>stückweise linearer Pfad</u> ist eine Abb. $c : [0,1] \to X_\Gamma$ s.d. eine Zerlegung $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$ existiert s.d. jede Einschränkung $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ von der Form $f_{e_i} \circ c_i$

$c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ von der Form $f_{e_i} \circ c_i$

ist für eine Kante e_i und eine affine Abbildung $c_i : [t_i, t_{i+1}] \to [0,1]$.

Wir sagen: c „verbindet x mit y"

oder „ist (stückw. lin.) Pfad von x nach y"

wenn $c(0) = x$ und $c(1) = y$.

Def 2.9 (Länge eines (stückw. lin) Pfades)

Die Länge eines Pfades c wie in 2.8 ist geg durch

$$l(c) = \sum_{i=0}^{n-1} l(c_i)$$

wobei $l(c_i) = \lambda(e_i) \cdot |c_i(t_i) - c_{i+1}(t_{i+1})|$.

Def 2.10 (Pseudometrik, metr. Graph)

Sei X_Γ zusammenhängend (d.h. je zwei Punkte sind durch einen stückweise linearen Pfad verbunden.)

Definiere eine Pseudo-Metrik

$$d : X_\Gamma \times X_\Gamma \to [0, \infty]$$

$$d(x,y) := \inf l(c).$$

$$d(x,y) := \inf_{c:\, x \rightsquigarrow y} l(c).$$

wobei $c: x \rightsquigarrow y$ stückw. lin. Pfad von x nach y sei.

Wir nennen (X_Γ, d) <u>metrischen Graph</u> (oder metrische Realisierung von Γ).

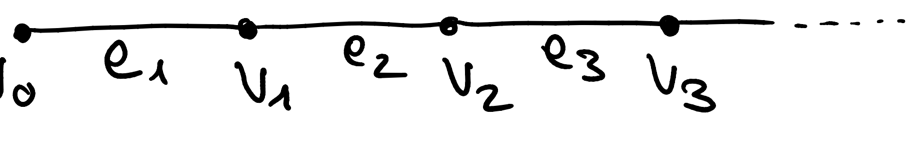
<u>Bem</u>. pseudo-Metrik: erfüllt (ii) und (iii) von Def 1.1 Metrik, aber <u>nicht</u> (i) d.h. es kann Punkte geben mit $d(x,y) = 0$ aber $x \neq y$.

<u>Bsp 2.11</u>

1) $\Gamma = (V, E)$ mit $V = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$

$E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Sei $\delta_0(e_n) = v_{n-1}$, $\delta_1(e_n) = v_n$.



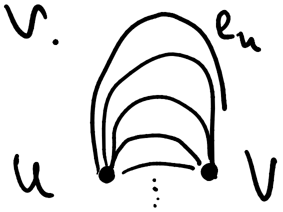
- Ist $\lambda(e_i) = 1$ $\forall i$ so ist X_Γ ein metr Graph isometrisch zu $[0, \infty)$.
- Ist $\lambda(e_n) = \frac{1}{2^n}$ dann ist X_Γ isometrisch zu $[0, 2)$ was nicht

isometrisch zu $[0,2)$ was nicht vollständig ist.

- i.A. ist X_Γ isometrisch zu $[0, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(e_i))$.

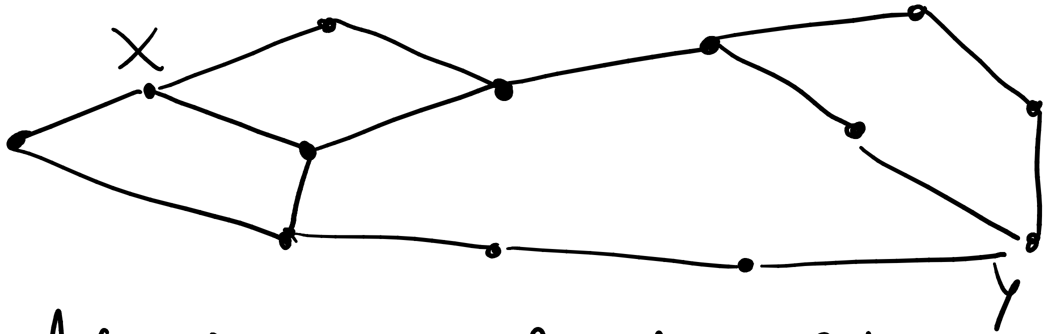
2) $V=\{u,v\}$, $E=\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
sei $\sigma_0(e_n)=u$ und $\sigma_1(e_n)=v$ $\forall n$.

- Ist $\lambda(e_n)=\frac{1}{n}$, so ist d <u>keine</u> Metrik auf X_Γ weil $d(u,v)=0$ aber $u\neq v$.



- Ist $\lambda(e_n)=1+\frac{1}{n}$ so ist d eine Metrik, $d(u,v)=1$.
Der metr. Raum (X_Γ, d) ist vollständig, aber es gibt keine Geodätische von u nach v.

3) Metrische Graphen sind oft geodätisch aber fast nie eindeutig geodätisch:



$d(x,y) = 5$, Geod. nicht eind.

Frage: Welche metr. Graphen sind eindeutig geodätisch?

Längen von Kurven

Wir haben für stückw. lin. Pfade in Graphen oben gesehen, wie man Länge definiert. Das wollen wir jetzt allgemeines machen für Pfade in metr. Räumen.

Def 2.12

Ein <u>Pfad</u> (<u>Kurve</u>) in einem metr. Raum X ist eine stetige Abb $c:[a,b]\to X$. Wir sagen auch c ist <u>Pfad von $x = c(a)$ nach $y = c(b)$</u>.

Seien $c_i : [a_i, b_i] \longrightarrow X$, $i = 1,2$, zwei Pfade in X mit $c_1(b_1) = c_2(a_2)$ so ist deren <u>Verkettung</u> $c_2 \circ c_1$ definiert durch

$$c_2 \circ c_1 : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} c_1(t) & , t \in [a_1, b_1] \\ c_2(t + a_2 - b_1), & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

<u>Bem.</u> Verkettung von n Pfaden wird induktiv definiert.

<u>Def 2.13</u> (Länge einer Kurve)

Die <u>Länge</u> $l(c)$ einer Kurve $c : [a,b] \to X$ ist definiert durch

$$l(c) := \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ gewählt ist, d.h.

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$$

(keine Schranke an n).

[illegible]

Beob. Länge einer Kurve ist entweder in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ oder $= \infty$.

$\uparrow$ rektifizierbare Kurven.

Bsp. 2.14

Sei $X = [0,1]$ mit $d(t,t') = |t-t'|$.
Sei weiter $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ unendliche Folge reeller Zahlen in $[0,1]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$.
Sei $c: [0,1] \to X$ Pfad mit $c(0) = 0$ und $c(t_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}/k$.
Dieser Pfad ist nicht rektifizierbar, weil die Länge nach unten durch die harmonische Reihe beschränkt ist. $\hookrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Betrachtet man den Graphen Y der Kurve c in $[0,1] \times \underbrace{[0,1]}_{=X}$ (mit der induzierten Metrik) so ist Y kompakt. wegzusammenhängender metr. Raum.

kompakt, wegzshgder metr. Raum, aber zwischen $(0,0)$ und $(1, \ln(2))$ gibt es keinen rektifizierbaren Pfad.

Eigenschaften 2.15

Sei (X,d) metrischer Raum und $c:[a,b]\to X$ ein Pfad. Dann gilt:

(1) $l(c) \geq d(c(a), c(b))$.
$l(c) = 0 \Leftrightarrow c$ konstant

(2) Ist ϕ schwach-monotone Abb. $\phi:[a',b'] \twoheadrightarrow [a,b]$, dann ist $l(c) = l(c\circ\phi)$.

(3) Additivität: Ist $c = c_2 \circ c_1$, dann ist $l(c) = l(c_1) + l(c_2)$.

(4) Umgekehrter Pfad: Für den Pfad $\bar{c}:[a,b]\to X$ definiert durch $\bar{c}(t) = c(a+(b-t))$ gilt $l(c) = l(\bar{c})$.

(5) Ist c rektifizierbarer Pfad, so ist die durch $\lambda(t) := l(c|_{[a,t]})$ definierte

die durch $\lambda(t) := l(c|_{[a,t]})$ definierte Abbildung $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ für alle t stetig und schwach monoton steigend.

(6) Reparametrisierung nach Bogenlänge: Sind c und λ wie in (5). Dann gibt es einen eindeutigen Pfad $\tilde{c} : [0,l] \to X$ für den gilt: $\tilde{c} \circ \lambda = c$ und $l(c|_{[0,t]}) = t$.

Beweis: (1) klar nach Def der Länge.

(2) Umparametrisieren des Definitionsbereichs ändert Abstände der Bildpkte in X nicht.

(3) Wähle gemeinsame Verfeinerung der Triangulierung für c bzw $\overline{c}$ s.d. der Verknüpfungspunkt Punkt der Triangulierung ist. $\Rightarrow$ Beh.

(4) Entspricht umordnen der Summe in Def der Länge.

(5) Wegen (3) reicht es zu zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle gibt s.d. die Länge von c eingeschränkt auf so ein Teilintervall $< \varepsilon$ ist.

Um das zu zeigen wähle $\delta > 0$

Teilintervall $\leq \varepsilon$ ist.

Um das zu zeigen wähle $\delta > 0$ s.d.

(*) $d(c(t), c(t')) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t, t' \in [a, b]$ mit $|t - t'| < \delta$.

(geht wegen (gleichm.) Stetigkeit von c).

Weil $l(c)$ endlich ist können wir $[a, b]$ so unterteilen, dass $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ und $\sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) > l(c) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Diese Zerlegung können wir dann noch verfeinern s.d. $|t_i - t_{i+1}| < \delta \;\; \forall i$ und somit wegen (*) gilt:

$$d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es ist aber $l(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) \geq d(c(t_i), c(t_{i+1}))$

und $l(c) = \sum_{i=0}^{k-1} l(c|_{[t_i, t_{i+1}]})$ wegen (3).

Also ist

$$l(c) = \sum_{i=0}^{k-1} l(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) \underset{\otimes}{\geq} \sum_{i=0}^{k-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) > l(c) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da summandenweise „$\geq$" gilt bei $\otimes$ gilt für alle i, dass gilt für alle i, dass

$$\ell(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) - d(c(t_i), c(t_{i+1})) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

insbesondere also $< \varepsilon$ was zu zeigen war.

(6) folgt direkt aus (2) und (5). $\square$