Skript 03 Modellräume

Montag, 1. April 2019 21:31

Kapitel 3 Modellräume M_K^2

(vergl BH – Kapitel I.2)

Wir beschreiben 3 verschiedene Modellräume (der Dimension n), die für die weitere Vorlesung eine zentrale Rolle spielen. Dabei handelt es sich um 3 elementare verschiedene Geometrien.
(Alexander – Kapovitch – Petrunin, Sec 1)

Def 3.1 Modellräume M_K^2:

Der n-dimensionale <u>Modellraum</u> M_K^n <u>konstanter (Schnitt-) Krümmung K</u> sei für beliebiges $K \in \mathbb{R}$ geg. durch

- $M_0^n = \mathbb{E}^n$ (euklidischer Raum)
- $M_K^n = \mathbb{S}^n_{1/\sqrt{K}}$ (n-Sphäre mit Radius $1/\sqrt{K}$) für $K > 0$
- $M_K^n = \mathbb{H}_K$ (hyperbolische Ebene) für $K < 0$

Wir setzen $D_K := \operatorname{diam} M_K^n \quad \forall K$,
wobei $\operatorname{diam} X := \sup\{ d(x,y) \mid x,y \in X \}$
für einen Imf. metr. Raum X der

wobei $\operatorname{diam} X := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\}$ für einen bel. metr. Raum X der Durchmesser von X sei.

<u>Bem.</u>:
- $D_\kappa = \infty$ für $\kappa \leq 0$.
- $D_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa}$ für $\kappa > 0$
- $\forall\, x,y \in M^2_\kappa$ existiert eine eind. Verbindungskurve, wenn gilt $d(x,y) < D_\kappa$.

Wir betrachten folgende Modelle. Beachten Sie, dass es für H^2_{-1} viele andere (isometrische) Modelle gibt.

3.2 Modelle

Als Menge entsprechen obige Räume folgenden Punktmengen:

- $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$
- $S^n_{1/\sqrt{\kappa}}$ = Ball um 0 mit Radius $1/\sqrt{\kappa}$ in $\mathbb{E}^2$ (gemessen in eukl. Metrik) als Menge

⚠ Abstände in $S^2_{1/\sqrt{\kappa}}$ werden anders gemessen!

- $H^n_{-1} = \{ u \in \mathbb{E}^{n,1} \mid \langle u|u\rangle = -1,\ u_{n+1} > 0 \}$

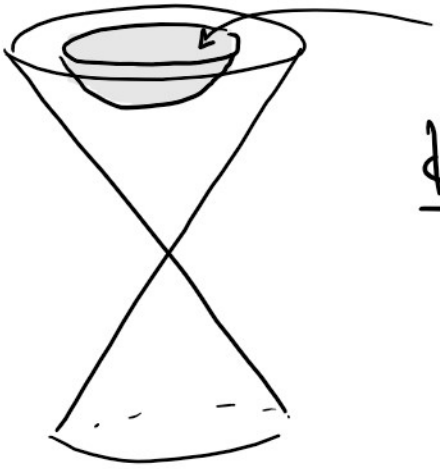
- $\mathbb{H}^n_{-1} = \{ u \in \mathbb{E}^{n,1} \mid \langle u|u\rangle = -1,\ u_{n+1} > 0 \}$

hier $\mathbb{E}^{n,1}$ ist $\mathbb{R}^{n+1}$ mit folgender symmetrischer Bilinearform:

$$\langle u,v\rangle := -u_{n+1}\cdot v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i$$

vom Typ $(2,1)$.

D.h. $\mathbb{H}^n_{-1}$ ist obere Hälfte des Hyperboloids $\{ u \in \mathbb{E}^{n,1} \mid \langle u,u\rangle = -1 \}$.



$\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^n_{-1}$

<u>Hyperboloidmodell</u>

Abstände zwischen $x,y \in M^2_K$ sind folgende Formeln gegeben:

- <u>in $\mathbb{E}^n = M^n_0$</u>:

$$d(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- <u>in $S^n_{1/\sqrt{K}} = M^n_K$</u> für $K > 0$:

$$d(x,y) := \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \cos^{-1}\big(\underbrace{(x|y)}_{\hat{=}\ \text{Winkel zwischen } [0x] \text{ und } [0y] \text{ in } \mathbb{E}^2}\big)$$

$$d(x,y) := \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \cos^{-1}((x|y))$$

euklid. Skalarprod. von x und y

Inverse der Cos-Funktion

this says that d is implicitly defined by the equation:

$$\cos(\sqrt{\kappa}\, d(x,y)) = (x|y).$$

- <u>in $\mathbb{H}^n_\kappa = \mathbb{M}^n_\kappa$</u> for $\kappa < 0$:

Der Abstand von x und y in $\mathbb{H}^2_{-1}$ ist die eindeutige Zahl $d(x,y) \geq 0$ s.d. gilt

$$\cosh(d(x,y)) = -\langle x|y \rangle$$

Bilinearform von oben

für allgemeines $\kappa < 0$ reskaliere die Metrik für $\mathbb{H}^n_{-1}$ mit $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$.

3.3 Eigenschaften von $\mathbb{E}^n := \mathbb{M}^n_0$:

(a) d wie oben definiert erfüllt die Δ-Ungleichung

(Beweis z.B. via Cauchy-Schwarz)

die Δ-Ungleichung
(Bew zB via Cauchy-Schwarz Ungleichung)

(b) Geodätische sind eindeutig und von der Form
$[x,y] = \{ ty + (1-t)x \mid 0 \leq t \leq 1 \}$

(c) 3 Punkte definieren ein eindeutiges Dreieck, dessen Innenwinkel sich zu 180° addieren.

3.4 Eigenschaften von $S^n_{1/2} - H^n_k$

(a) d wie oben definiert ist eine Metrik und erfüllt die Δ-Ungl.

(b) Geodätische Segmente $[x,y]$ sind Stücke von Großkreisen auf denen x und y liegen. Diese sind genau dann eindeutig, wenn $d(x,y) < D_k$.

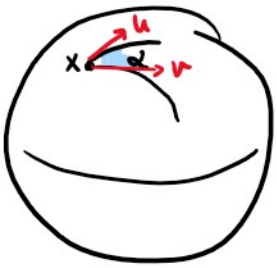
(c) Für Tripel von Punkten x,y,z mit $d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) < 2 \cdot D_k$ existiert ein eindeutiges geodätisches Dreieck mit Ecken x,y,z

geodätisches Dreieck mit Ecken x, y, z.
Summe der sphärischen Innenwinkel ist $> 180°$. (s.u.)

(d) Jeder offene (bzw geschlossene) Ball mit Radius $r \leq \pi/2$ (bzw $< \frac{\pi}{2}$) in M_1^n ist convex.

3.5 Def sphärischer Winkel

Seien zwei geod. Segmente auf S^n am selben Punkt x gegeben.
Seien u und v die Richtungsvektoren (Tangentialvektoren) der beiden geodätischen Segmente.
Dann ist der Winkel α die eindeutige (positive) Zahl in $[0, \pi]$ s.d. $\cos(\alpha) = (u|v)$.



euklid. Skalarprod.

3.6 Eigenschaften $\mathbb{H}_\kappa^n = M_\kappa^n$ $\kappa < 0$

(a) d definiert wie oben erfüllt die Δ-Ungleichung.

(b) geodätische Segmente sind ein-

(b) geodätische Segmente sind eindeutig für alle Paare von Punkten. Sie sind von der Form:

$$\mathbb{H}^n_{-1} \cap \text{n-dim UR von } \mathbb{E}^{n,1}.$$

(genauere Beschreibung unten)

(c) Jedes Tripel von Punkten definiert ein eindeutiges Dreieck mit Innenwinkelsumme $< 180°$.

<u>Bem.</u> hyperbolischer Winkel wird analog zum sphärischen Winkel definiert. Ersetze $\cos(\alpha) = (u|v)$ in der Definition durch:

$$\cos\alpha = \langle u|v\rangle$$

↑ üblicher cos ↖ Bilinearform

3.7. Geodätische Segmente in $\mathbb{H}^n$ $(K=-1)$

Sei $x \in \mathbb{H}^n$ und sei u gegeben mit $\langle u|u\rangle = 1$ und $\langle u|x\rangle = 0$ $(u \in A^\perp)$.

Betrachte den Pfad $c : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ geg. durch $t \mapsto (\cosh t)x + (\sinh t)u$

Es gilt: $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ $\forall t, t'$

Ein Segment von x nach y in $\mathbb{H}^n$

Ein <u>Segment von x nach y</u> in $\mathbb{H}^n$ ist geg. durch obige Formel, wobei u als Einheitsvektor in $(y + \langle x|y\rangle \cdot x)$ gewählt wird, d.h. als eindeutiger Einheitsvektor in $x^\perp$ s.d. gilt

$$u = (\cosh a)\, x + (\sinh a)\, u$$

mit $a = d(x,y)$.

Bem. 3.8 Winkel

Obwohl wir für allgemeine metrische Räume noch keine Winkel definiert haben macht es für diese Modellräume Sinn über Winkel zu sprechen, da wir alle über reelle Vektorräume definiert haben.

Bem 3.9:

Die hier definierten Modellräume $\mathbb{H}^n, \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ sind alle <u>homogen</u>, d.h.

X homogen $:\Longleftrightarrow$ $\forall A \subset X$ endlich jede Isometrie $f: A \to B \subset X$ zu einer Isometrie von $X \to X$ erweitert

↑ metr. Raum

In dim 2 sind die obigen 3 und deren Quotienten  die

Quotienten  $S_g \ \forall g$,  T^2 die einzigen homogenen, glatten Flächen.

In dim 3 ist die Lage viel komplizierter.