Skript 05 Cat(k) Räume

Mittwoch, 24. April 2019 11:56

Kapitel 5 CAT(0) – Räume

Wir werden jetzt eine Möglichkeit kennen lernen obere Krümmungsschranken metrisch zu beschreiben. Dazu werden wir geodätische Dreiecke in bel. metr. Räumen vergleichen mit geodätischen Dreiecken in M_k^2.

Def 5.1 Dreiecke

Ein <u>geodätisches Dreieck</u> Δ in einem metr. Raum (X,d) ist ein Tripel von Punkten x,y,z zusammen mit einem Tripel $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ von geodätischen Segmenten mit $\gamma_{ab}: a \rightsquigarrow b$. Schreibe $\Delta = \Delta(x,y,z, \gamma_{ab})_{a,b \in \{x,y,z\}}$

<u>Bem</u>: Ist X eindeutig geodätisch so schreiben wir auch $\Delta = \Delta(x,y,z)$.

Def 5.2 Vergleichsdreiecke $\Delta(x,y,z,\dots)$

Sei (X,d_X) metr. Raum und Δ Dreieck in X. Ein <u>Vergleichsdreieck</u> $\bar{\Delta}$ für Δ in M_k^2 ist ein Dreieck $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ in M_k^2 für das gilt:

$$d_X(x,y) = d_k(\bar{x},\bar{y})$$
$$d_X(y,z) = d_k(\bar{y},\bar{z})$$
$$d_X(z,x) = d_k(\bar{z},\bar{x})$$

wobei d_k die Metrik auf M_k^2 bezeichne.

Ist $k>0$ so nehmen wir an, dass

wobei d_κ die Metrik auf M_κ^2 bezeichne.
Ist $\kappa > 0$ so nehmen wir an, dass
$\underbrace{d_\kappa(x,y) + d_\kappa(y,z) + d_\kappa(z,x)}_{\text{Umfang von } \Delta} < 2D_\kappa$ ist.

<u>Bem.</u> 1) Die Bedingung an den Umfang gewährleistet, dass für alle betrachteten Dreiecke Δ ein Vergleichsdreieck existiert.
2) Vergleichsdreiecke sind bis auf Isometrie eindeutig

<u>Def. 5.3</u>

Ein <u>Vergleichspunkt</u> $\bar{p}$ für einen Punkt p auf einer Seite $[a,b]$ eines Dreiecks Δ ist der (eindeutige) Punkt $\bar{p}$ auf der Seite $[\bar{a},\bar{b}]$ von $\bar{\Delta}$ für den gilt $d(a,p) = d(\bar{a},\bar{p})$.

<u>Def. 5.4</u> CAT(κ)-Räume
Sei (X,d) metrischer Raum und $\kappa \in \mathbb{R}$.
Sei $\Delta(x,y,z)$ ein geodätisches Dreieck in in X vom Umfang $< 2D_\kappa$.
Wir sagen Δ <u>erfüllt die CAT(κ)-Ungleichung</u>, wenn gilt:

$\forall\, p,q$ auf Δ und ihre Vergleichspunkte $\bar{p},\bar{q}$ auf einem Vergleichs-

punkte $\bar{p}, \bar{q}$ auf einem Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ gilt

$$d(p,q) \leq d(\bar{p},\bar{q}).$$

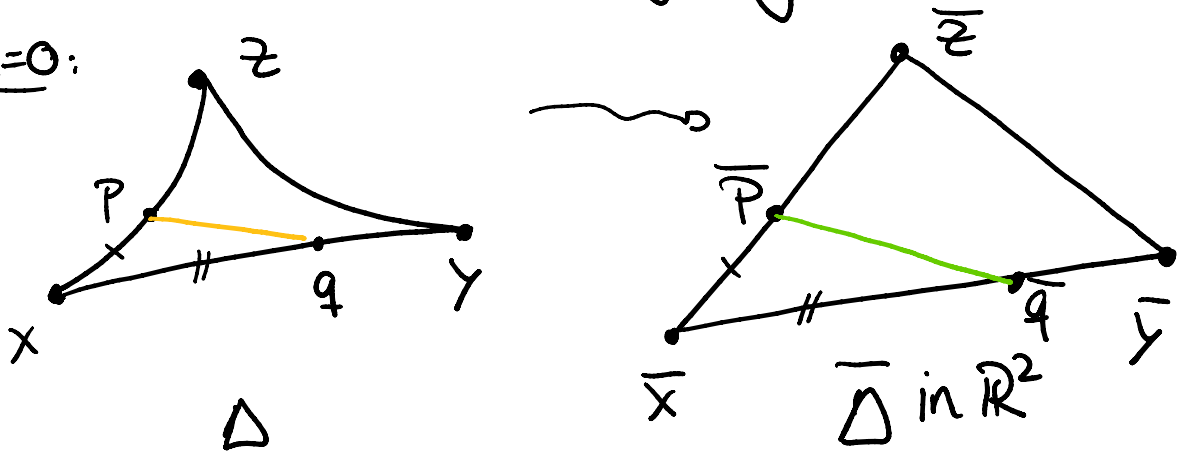
Wir sagen X ist ein CAT(κ)-Raum, (kurz: X ist CAT(κ)), wenn

- X D_κ-geodätischer Raum

und

- alle geodätischen Dreiecke mit Umfang $< 2D_\kappa$ erfüllen die CAT(κ)-Bedingung

$\underline{\kappa=0}$:



$$d(p,q) \leq d(\bar{p},\bar{q})$$

<u>Bem</u>: Wir fordern nicht, dass X vollständig ist!

<u>Def 5.4</u> Ein metrischer Raum X hat <u>Krümmung $\leq \kappa$</u>, wenn X lokal CAT(κ) ist, d.h. $\forall x \in X$ eine Umgebung U existiert so, dass $(U, d|_U)$ CAT(κ) ist.

Bung existiert so, dass $(U, d|_U)$ CAT(K) ist.
Hat X Krümmung ≤ 0 so sagt man auch X ist <u>nicht-positiv gekrümmt</u>.

<u>Historische Bemerkung:</u>

- Def 5.4 stammt von Alexandrov (1951) „A theorem on triangles in a metric space and some of its applications"
- Man kann zeigen, dass eine geeignet glatte Riemannsche Mfkt (zB C^3) Krümmung $\leq K$ hat im gerade definierten Sinn g.d.w (!) alle ihre Schnittkrümmungen $\leq K$ sind.
- Gromov hat die Bezeichnung "CAT" eingeführt zu Ehren von Cartan, Alexandrov, Toponogov die an der Entwicklung beteiligt waren.
- Manchmal heißen solche Räume auch Alexandrov-Räume mit oberer Krümmungsschranke K.

Wir beweisen jetzt eine erste Serie an

Wir beweisen jetzt eine erste Serie an Eigenschaften von CAT(κ)-Räumen bevor wir uns im Wesentlichen auf CAT(0)-Räume beschränken werden.

Satz 5.5 Geodätische in CAT(κ) Räumen

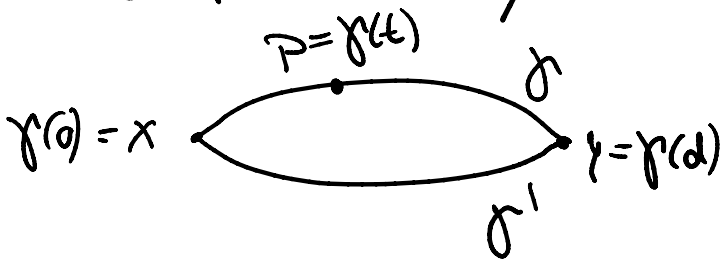
Sei (X,d) ein CAT(κ) Raum, dann gilt:

(1) $\forall x,y \in X$ mit $d(x,y) < D_\kappa$ gibt es ein eindeutiges geodätisches Segment von x nach y.

(2) Jede lokale Geodätische der Länge $\leq D_\kappa$ ist eine Geodätische.

Beweis:

(1) Seien x,y gegeben mit $d(x,y) < D_\kappa$. Seien γ und γ' zwei Geodätische von x nach y. Sei p ein Punkt auf γ verschieden von x und y.



Sei p' Punkt auf γ' für den gilt $d(x,p) = d(x,p')$ (und somit auch $d(y,p) = d(y,p')$).

Wegen $d(x,y) < D_\kappa$ ist jedes Ver-

Wegen $d(x,y) < D_K$ ist jedes Vergleichsdreieck zum Dreieck
$\Delta = \Delta(x, p, y, \gamma|_{[0,t]}, \gamma|_{[t,d]}, \gamma')$
in M_K^2 degeneriert.
Also ist der Vergleichspunkt $\bar{p}$ von p gleich dem Vergleichspkt $\bar{p}'$ von p'.

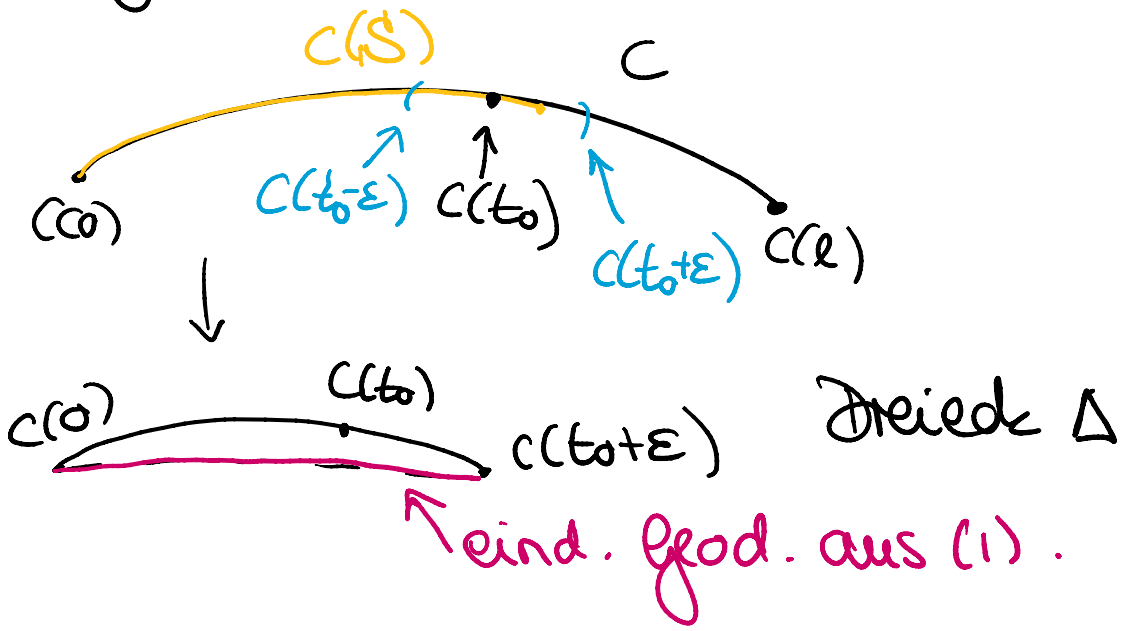
Insbes. ist $d(p,p') \leq d(\bar{p}, \bar{p}') = 0$.
$\Rightarrow p = p'$ und $\gamma = \gamma'$.

(2) Sei $c : [0,l] \to X$ lokale Geodätische mit $l < D_K$.
Sei $S := \{ t \in [0,l] \mid c|_{[0,t]} \text{ ist Geodätische} \}$.

Dann ist S abgeschlossen.
Wir zeigen: S ist auch offen (und es muss daher $S = [0,l]$ gelten).

Sei t_0 ein Punkt in S mit $0 < t_0 < l$.
Weil c lokale Geodätische ist, ist $c|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ Geodätische für ein $0 < \varepsilon < l - t_0$.
Betrachte folgendes geodätische Dreieck:
$\Delta = \Delta(c(0), c(t_0), c(t_\varepsilon))$ wobei zwei der drei Dreiecksseiten durch Einschränkung von c auf $[0, t_0+\varepsilon]$ gegeben sind und die

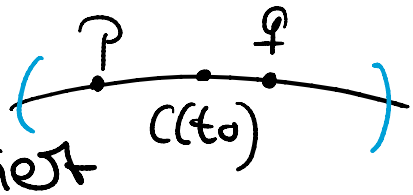
$[0, t_0+\varepsilon]$ gegeben sind und die dritte Seite durch die eindeutige Geodätische aus (1).



<u>Beh:</u> Das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ von Δ ist degeneriert.

<u>Bew Beh.</u> <u>Ann</u> $\bar{\Delta}$ ist nicht degeneriert.

Seien p und q Punkte auf Δ nah an $c(t_0)$ und auf verschiedenen Seiten von $c(t_0)$.



Ist $\bar{\Delta}$ nicht degeneriert so können wir die CAT(K)-Ungl. auf p und q anwenden und erhalten einen Widerspruch dazu, dass $c|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ eine Geodätische ist.

$\Rightarrow c|_{[0, t_0+\varepsilon]}$ hat Länge $t_0+\varepsilon$

$\Rightarrow c|_{[0,t_0+\varepsilon]}$ [illegible] $t_0+\varepsilon$

und ist Geodätische. Daher ist $(t_0, t_0+\varepsilon) \subset S'$ und S offen. $\square$

Satz 5.6 Bälle in CAT(κ)-Räumen

Sei (X,d) CAT(κ)-Raum. Dann gilt:

(1) Bälle vom Radius $< D_\kappa/2$ sind konvex, d.h. je zwei Punkte in einem solchen Ball sind durch eine Geodätische verbunden, die auch in diesem Ball enthalten ist.

(2) Bälle vom Radius $< D_\kappa$ in X sind kontrahierbar.

Beweis

(1) Betrachtet man einen Ball vom Radius $< D_\kappa/2$ in M_κ^2 so ist dieser konvex im genannten Sinn.
Zusammen mit der CAT(κ)-Ungleichung für Dreiecke in X erhält man Konvexität für Bälle in X.
Eindeutigkeit von Geodätischen folgt aus Satz 5.5(1).

Eindeutigkeit von geodätischen folgt aus Satz 5.5(1).

(2) kontrahiere jeden Punkt x auf den Mittelpunkt p des Balles längs des eindeutigen geodätischen von x nach p.

$\square$

#

Cor

Ist $\kappa \leq 0$ und X CAT(κ) so ist X eindeutig geodätisch und kontrahierbar.

Bew. folgt direkt aus 5.5 und 5.6. $\square$

Wir beschränken uns jetzt auf CAT(0) Räume.

Lemma 5.7 (konvexe Metrik)

In einem CAT(0)-Raum (X,d) ist die Metrik d konvex, d.h.

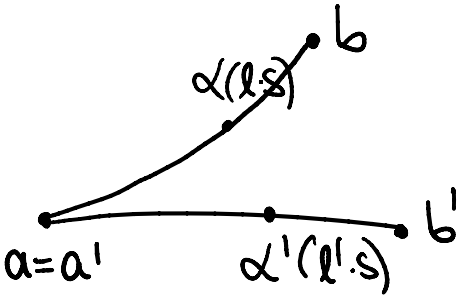
Für alle geodätischen α von a nach b in X und α' von a' nach b' in X gilt

für alle $s \in [0,1]$ ist mit $l := d(a,b)$ und $l' := d(a',b')$

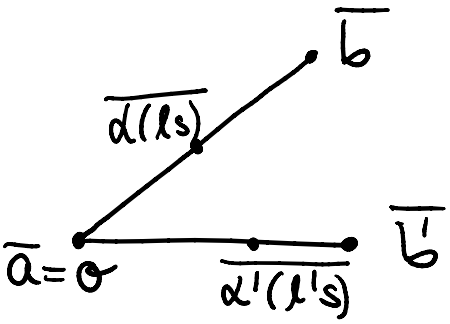
$$d(\alpha(l \cdot s), \alpha'(l' s)) \leq (1-s) \cdot d(a,a') + s \cdot d(b,b').$$

$\llcorner$ $d(\alpha(l\cdot s), \alpha'(l's)) \leq (1-s)\cdot d(a,a') + s\cdot d(b,b')$.

<u>Beweis</u> Wir beweisen zuerst den Spezialfall $\underline{\underline{a = a'}}$.



$\rightsquigarrow$ Betrachte Vergleichsdreieck zum Dreieck $\Delta = \Delta(a,s,b')$.



Dann ist als Elem. des VR $\mathbb{R}^2$

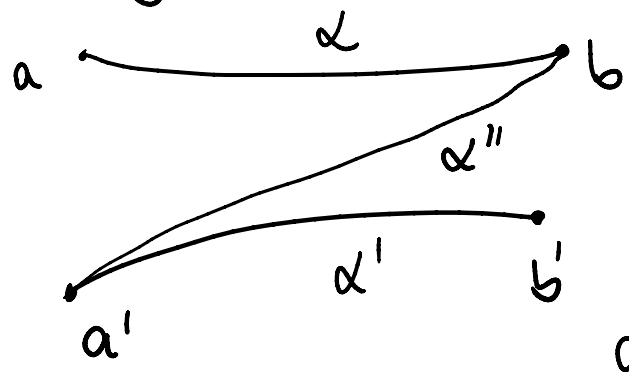
$\overline{\alpha(l\cdot s)} = s\cdot\overline{b}$ und $\overline{\alpha'(l's)} = s\cdot\overline{b'}$

Somit ist $\|s\overline{b} - s\overline{b'}\|_2 = s\cdot\|\overline{b}-\overline{b'}\|_2$

$\Rightarrow d(\alpha(ls), \alpha'(l's)) \leq s\cdot d(b,b')$

was zu zeigen war.

<u>Allgemeiner Fall:</u>



Sei α'' Geodätische von a' nach b. Dann gilt (2x Spezialfall anwenden):

$d(\alpha'(ls), \alpha''(l''s)) \leq s\cdot d(b,b')$

und $d(\alpha(\mu(1-s)), \alpha''(l''(1-s)) \leq (1-s)\cdot d(a,a')$.

Wobei $l'' := d(a',b)$.

Daraus folgt (mit Δ-Ungl) die Beh. $\square$

Daraus folgt (mit Δ-Ungl) die Beh. $\square$

<u>Bem:</u> Man kann zeigen, dass aus der Konvexität der Metrik viele der Eigenschaften vom Anfang des Kapitels folgen $\to$ vergl. Übungen!

<u>Lemma 5.8</u> (Projektion auf konv. Mengen)

Sei X CAT(0) und $C \subset X$ konvexe, vollständige Teilmenge.
Dann existiert für alle $p \in X$ ein eindeutiger Punkt $\mathrm{proj}_C(p) \in C$ s.d. gilt:

$$d(p, C) = d(p, \mathrm{proj}_C(p)).$$

<u>Beweis:</u>
Wir müssen zeigen: Ist $(q_n)_n$ eine Folge in C mit $\lim_{n\to\infty} d(q_n, p) = d(p, C)$ so ist $(q_n)_n$ Cauchy-Folge.

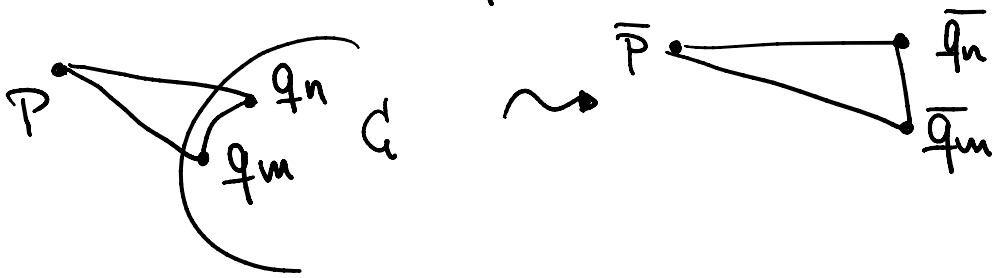
Eine solche Folge existiert nach Def Abstand zu einer Menge und der Vollständigkeit von C.

Dann hat diese Folge (wegen C vollst.) einen Grenzwert $q \in C$ mit $d(p,q) = d(p, C)$.
Eindeutigkeit folgt aus Eindeutigkeit des Grenzwerts.

Setze nun $k := d(p, G)$. Sei $\varepsilon > 0$ klein im Vergleich zu k.

Nach Ann. über (q_n) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ s.d. $d(q_n, p) < k + \varepsilon$ für alle $n > N$.

Seien nun $n, m > N$ fest gewählt. Betrachte Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ zum Dreieck $\Delta = \Delta(p, q_n, q_m)$.



Wir wollen zeigen: $\underbrace{d(\bar{q}_n, \bar{q}_m) \leq 4(2\varepsilon k + \varepsilon^2)}_{\text{Beh. 1}}$

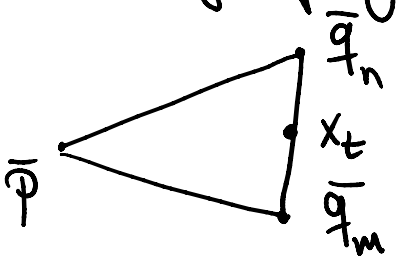
Denn dann gilt:

$$d(q_n, q_m) \underset{\text{CAT(0)-Ungl.}}{<} d(\bar{q}_n, \bar{q}_m) \leq 4(2\varepsilon k + \varepsilon^2)$$

und damit eine Cauchy-Folge.

<u>Bew. Beh 1:</u>

Im $\mathbb{E}^2$ gilt folgende Formel:



$$x_t := (1-t)\bar{q}_n + t\,\bar{q}_m \quad \text{für } t \in [0,1].$$

weil G konvex ist liegt x_t in G

$\Rightarrow$

$$d^2(\bar{p}, x_t) = (1-t)\, d^2(\bar{p}, \bar{q}_n) + t \cdot d^2(\bar{p}, \bar{q}_m)$$

$\to q_m$

$$d^2(\bar{p}, x_t) = (1-t)\, d^2(\bar{p}, q_n) + t \cdot d^2(\bar{p}, \bar{q}_m) - t\cdot(1-t)\cdot d^2(\bar{q}_n, \bar{q}_m).$$

Somit ist mit $t = \frac{1}{2}$

$$d^2(\bar{q}_n, \bar{q}_m) = 4\cdot\left(\tfrac{1}{2} d^2(\bar{p}, \bar{q}_n) + \tfrac{1}{2} d^2(\bar{p}, \bar{q}_m) - d^2(\bar{p}, \bar{x}_{\frac{1}{2}})\right).$$

$$\leq 2\cdot(k+\varepsilon)^2 + 2\cdot(k+\varepsilon)^2 - 4d^2(\bar{p}, \bar{x}_{\frac{1}{2}}) = \otimes$$

$d(\bar{p}, \bar{q}_n) = d(p, q_n) \leq k+\varepsilon$
selbe für q_m

Mitte von q_n, q_m

Nun ist $k^2 \leq d^2(p, x_{\frac{1}{2}}) \leq d^2(\bar{p}, \bar{x}_{1/2})$ $\otimes$

weil $x_{\frac{1}{2}}$ nicht unbed. das Min realisiert

hier geht Konvexität ein
Mitte $x_{1/2}$ in C

Also folgt:

$$d^2(\bar{q}_n, \bar{q}_m) \leq 4(k+\varepsilon)^2 - d^2(\bar{p}, \bar{x}_{1/2})$$
$$\leq 4(k+\varepsilon)^2 - 4k^2$$
$$= 8k\varepsilon + 4\varepsilon^2$$

mit $\otimes$

Also gilt Beh. 1 $\square$

Def 5.9

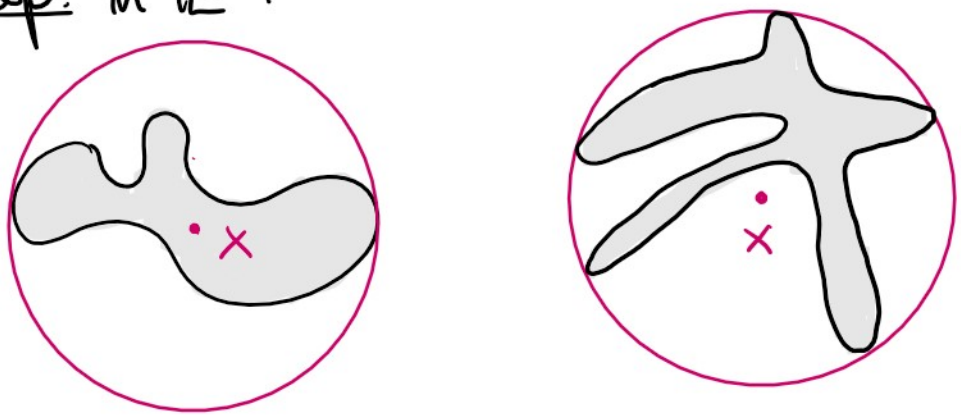
Der <u>Radius</u> einer beschränkten Teilmenge $E \subset X$ in einem metrischen Raum (X, d) ist definiert durch

$$\operatorname{rad}(E) := \inf\{ r > 0 \mid \exists x \in X \text{ mit } E \subset \overline{B}_r(x) \}$$

$\mathrm{rad}(E) := \inf\{ r > 0 \mid E \subset \overline{B}_r(x) \}$

Radius wird "von außen" gemessen.

<u>Bsp.</u> in $\mathbb{E}^2$:



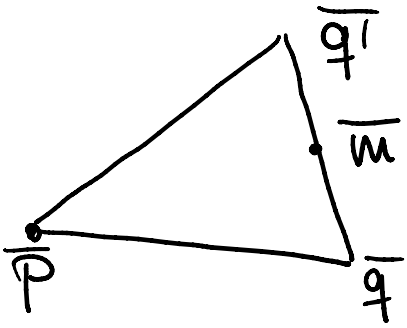
- x kann, muss aber nicht in E liegen.
- manchmal ist Radius = Durchmesser.

<u>Satz 5.10</u> (Bruhat-Tits-Satz)

Sei X vollständiger CAT(0) Raum.
Sei $E \subset X$ beschränkt.
Dann gibt es genau ein $q \in E$ mit
$\overline{B}_r(q) \supseteq E$ und $r = \mathrm{rad}(E)$.
Wir nennen q das <u>Zentrum</u> von E.

<u>Beweis</u>: Sei $r = \mathrm{rad}(E)$.
Seien q und q' zwei Punkte in X für die gilt: $\overline{B}_{r+\varepsilon}(q') \cap \overline{B}_{r+\varepsilon}(q) \supseteq E$.
Sei $p \in E$.
Betrachte Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}$ zum Dreieck $\Delta = \Delta(p, q, q')$.

Sei $\overline{m}$ Vergleichspkt der



Sei $\overline{m}$ Vergleichspkt der Mitte m zwischen q und q'.

Dann gilt: wie im Bew zur Proj. auf konvexes C

$$4r^2 + 4\varepsilon^2 + 8r\varepsilon \geq 4r^2 + d(q,q')^2.$$

Ist also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in X mit $\overline{B}_{r+\frac{1}{n}}(q_n) \supseteq E$, so ist $(q_n)_n$ Cauchy-Folge mit Grenzwert $q \in X$.

Für alle $p \in E$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(p,q) \leq r$ also ist $\overline{B}_r(q) \supseteq E$. Aus der Cauchy-Eigenschaft von (q_n) folgt auch die Eindeutigkeit von q. $\square$

Def 5.11

Sei X ein metr. Raum und G eine Gruppe. Eine <u>isometrische Wirkung</u> von G auf X ist ein Homomorphismus $G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Iso}(X)$ wobei $\mathrm{Iso}(X) := \{f: X \to X,\ f \text{ Isometrie}\}$.

Wir sagen <u>G wirkt auf X</u> und notieren in Kurzschreibweise <u>$G \circlearrowright X$</u>

Die <u>Fixpunktmenge</u> von G ist

$$X^G = \{x \in X \mid \underbrace{g(x) = x}\ \forall g \in G\}.$$

zur Notation: hier identifizieren

Zur Notation: hier identifizieren wir g mit seinem Bild $\varphi(g)$ in $\mathrm{Iso}(X)$!

Lemma 5.12

Sei X CAT(0) mit $X^G \neq \emptyset$ für eine Wirkung der Gruppe G auf X.
Dann ist X^G abgeschlossen und konvex.

Beweis: Blatt 2 Aufgabe 6. $\square$

Satz 5.13 **Bruhat-Tits-Fixpunktsatz**

Sei X vollständiger CAT(0) Raum und G eine Gruppe, die isometrisch auf X wirkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\exists$ eine beschränkte G-Bahn $G(x) \subset X$

(2) Jede G-Bahn in X ist beschränkt.

(3) $X^G \neq \emptyset$ d.h. es existiert mind. ein Fixpunkt.

Beweis:

(2) $\Rightarrow$ (1): klar (ebenso (3) $\Rightarrow$ (1))

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei $E := G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ beschränkt, dann gibt es mit dem Bruhat-Tits-Satz ein eindeutiges $q \in X$ mit $E \subset \overline{B_r(q)}$, $r := \mathrm{rad}(E)$.

$q \in X$ mit $E \subset \overline{B_r(q)}$, $r := \mathrm{rad}(E)$.
Weil E invariant unter der G-Wirkung ist muss auch q G-invariant sein.
Somit ist $q \in X^G \neq \emptyset$.

<u>(3) $\Rightarrow$ (2):</u> Sei $x \in X^G$. Sei $y \in X$ bel.
Dann ist $G(y) \subset \overline{B_r(x)}$ mit $r = d(x,y)$
(weil G isometrisch wirkt).

$\square$

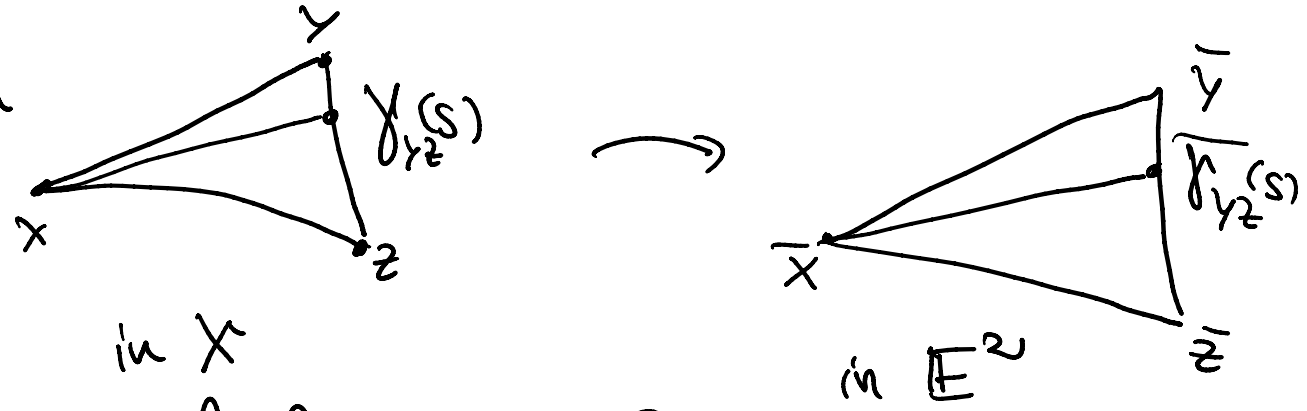
Wir lernen jetzt alternative Charakterisierungen für CAT(0)-Räume kennen.

<u>Lemma 5.14</u>

Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn $\forall$ geodätischen Dreiecke $\Delta = \Delta(x,y,z,\gamma_{a,b})$ mit Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ gilt:

$$d(x, \gamma_{yz}(s)) \leq \| \bar{x} - \bar{\gamma}_{yz}(s) \|_2 . \quad (*)$$

d.h.



Wir vergleichen nur Ecken mit der gegenüberliegenden Seite

wir vergleichen nur einen mit der gegenüberliegenden Seite.

<u>Beweis:</u> CAT(0) $\Rightarrow$ (*) ist klar.

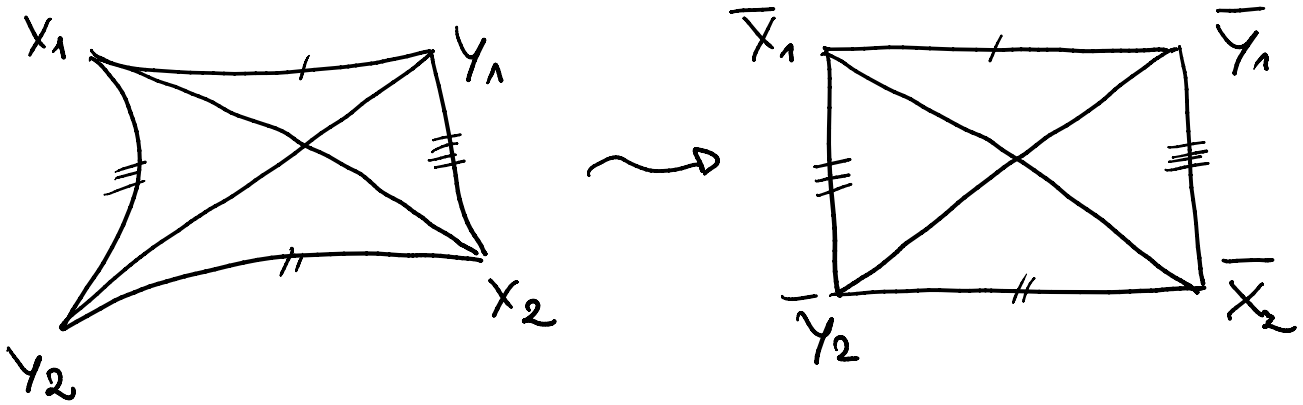
„$\Leftarrow$" Vergl BH p.161 Prop 1.7 $\square$

<u>Def 5.15</u> Ein metrischer Raum (X,d) hat <u>ungefähre Mittelpunkte</u>, wenn es für alle $x,y \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit

$$d(x,m),\ d(y,m) \leq \frac{1}{2} d(x,y) + \varepsilon .$$

Der Raum erfüllt die <u>CAT(0)-4-Punkt-Bedingung</u>, wenn es für alle x_i, y_i $i=1,2$ in X immer Punkte $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in \mathbb{E}^2$ gibt für die gilt:

$$d(x_i, y_j) = \| \bar{x}_i - \bar{y}_j \|_2 \qquad i,j \in \{1,2\}$$
$$d(x_1, x_2) \leq \| \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \|_2$$
$$d(y_1, y_2) \leq \| \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \|_2$$



Aus der CAT(0)-4-Punkt Bedingung kann man CAT(0) [illegible]

Aus der CAT(0)-4-Punkt Bedingung kann man CAT(0)-Räume auch charakterisieren.

Satz 5.16

Ein vollständiger metrischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn es ungefähre Mittelpunkte hat und alle 4-Tupel von Punkten die CAT(0)-4-Punkt Bedingung erfüllen.

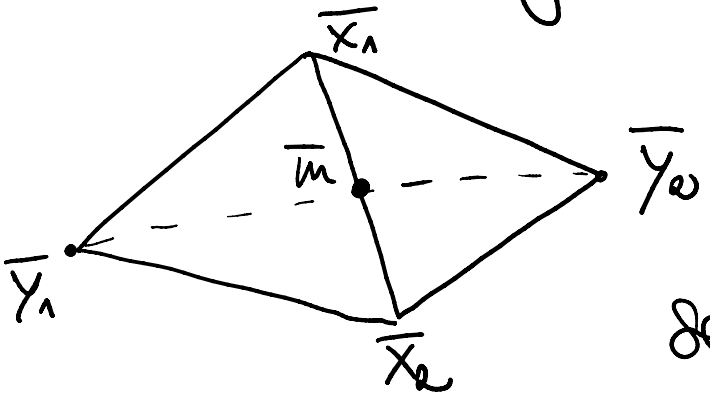
Beweis „$\Rightarrow$" Nun X ist CAT(0).

Dann besitzt X Mittelpunkte und daher auch ungefähre Mittelpunkte.

Seien x_1, y_1, x_2, y_2 aus X.

Betrachte Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(x_1, x_2, y_2)$ und $\Delta_2 = \Delta(x_1, x_2, y_2)$ und zugehörige Vergleichsdreiecke $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ mit gemeinsamer Seite $\overline{x}_1 \overline{x}_2$.

Fall 1:



das 4-Eck ist konvex.

Sei m Mitte von x_1 und x_2

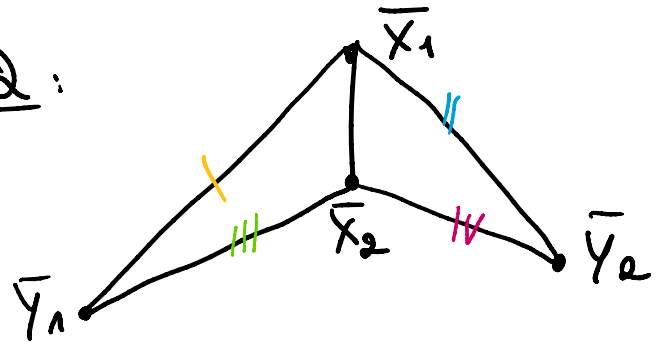
Dann gilt $d(y_1, y_2) \leq d(y_1, m) + d(y_2, m)$

$$\leq \|\overline{y}_2 - \overline{m}\|_2 + \|\overline{y}_2 - \overline{m}\|_2$$

$$\leq \|\bar{y}_2 - \bar{m}\|_2 + \|\bar{y}_2 - \bar{m}\|_2$$
$$= \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_2$$

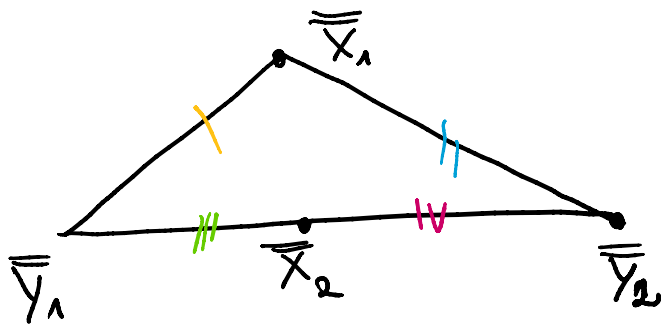
Somit sind die $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ die gesuchten Punkte.

<u>Fall 2</u>:



das 4-Eck ist nicht konvex

Betrachte ein neues Dreieck in $\mathbb{R}^2$:



mit Seiten entsprechend dem 4-Eck gewählt.

Dann ist $\|\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{x}}_2\|_2 \geq \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2 = d(x_1, x_2)$

$$\|\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_2\|_2 = \|\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{x}}_2\|_2 + \|\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{y}}_2\|_2$$
$$= d(x_2, y_1) + d(x_2, y_2) \underset{\Delta\text{-Ungl}}{\geq} d(y_1, y_2).$$

Somit sind $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{y}}_i$ die gesuchten Punkte.

„$\Leftarrow$" Sei X vollständig mit ungefähren Mittelpunkten und CAT(0)-4-Pkt-Bed

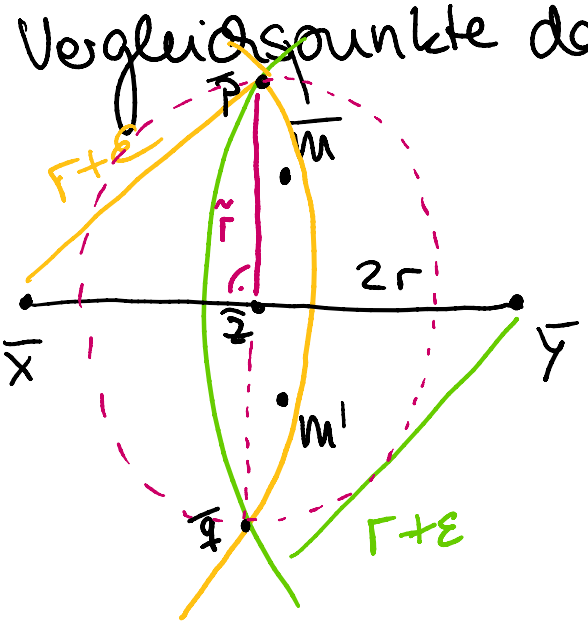
<u>Bew.</u> X hat Mittelpunkte und ist daher geodätisch. (vergl. Übungen)

daher geodätisch. (vergl. Übungen)

Wir konstruieren einen Mittelpunkt mit Hilfe einer Folge ungefährer Mittelpunkte.

Seien $x, y \in X$ mit $d(x,y) = 2r$ und zwei ungefähre Mittelpunkte m, m' gegeben.
D.h. $d(x,m), d(y,m), d(x,m'), d(y,m') \leq r + \varepsilon$.

Betrachte das Quadrupel x, y, m, m' und Vergleichspunkte dazu im $\mathbb{E}^2$ mittels CAT(0)-4-Pkt-Bedingung.



$\bar{z}$ ist Mitte zwischen den Pkten $\bar{x}, \bar{y}$

(Dann ist
$$d(m,m') \leq \|\bar{m} - \bar{m}'\|_2 \leq 2(r+\varepsilon).)$$

Der Abstand $d(\bar{p}, \bar{q})$ ist beschränkt durch $\tilde{r}$

$\tilde{r}$ = Radius um $\bar{z}$ des Kreises durch $\bar{p}$ und $\bar{q}$.

Es ist aber $\tilde{r}^2 = (r+\varepsilon)^2 - r^2$ nach Pythagoras.

Damit gilt:
$$d(m,m') \leq d(\bar{m}, \bar{m}') \leq \tilde{r} = \sqrt{(r+\varepsilon)^2 - r^2} = \sqrt{2r\varepsilon + \varepsilon^2} \to 0$$

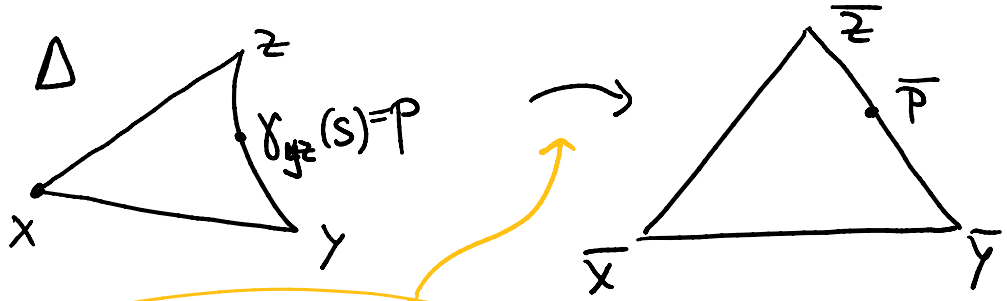
$$= \sqrt{2r\varepsilon + \varepsilon^2} \to 0$$
$$(\varepsilon \to 0)$$

Dann ist aber jede Folge $(m_n)_n$ ungefährer Mittelpunkte m_n mit Fehlerterm $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$ eine Cauchy-Folge.

Der Grenzwert $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ ist Mittelpunkt.

Wir haben gezeigt, dass X dann auch geodätisch ist.

Betrachte geodätisches Dreieck $\Delta = \Delta(x, y, z, \gamma_{ab})$ in X:



GT(0)-4-Pkt-Bed. angewandt auf x, y, p, z liefert Punkte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{z}$.

Es gilt:
$$d(y,z) \leq \|\bar{y} - \bar{z}\|_2$$
$$\| $$
$$d(y,p) + d(p,z) = \|\bar{y} - \bar{p}\|_2 + \|\bar{z} - \bar{p}\|_2$$

Allgemein gilt mit Δ-Ungl
$$\|\bar{y} - \bar{z}\|_2 \leq \|\bar{y} - \bar{p}\|_2 + \|\bar{z} - \bar{p}\|_2 .$$

Also gilt Gleichheit und $\bar{p}$ liegt auf der Geraden durch $\bar{y}$ und $\bar{z}$.

Geraden durch $\bar{y}$ und $\bar{z}$.

Dann ist aber $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ Vergleichsdreieck für $\Delta(x, y, z, \gamma_{ab}) = \Delta$.

Wegen CAT(0)-4-Pkt Bed. gilt $d(x,p) \leq d(\bar{x}, \bar{p})$ und mit Le 5.14 ist X also ein CAT(0)-Raum. $\square$