Skript 07 Untere Krümmungsschranke

Dienstag, 4. Juni 2019 16:37

$\omega_k = D_k = \pi/\sqrt{k}$

Kap 7 Alexandrov Räume mit unteren Krümmungsschranken

Ganz analog zu (AT(k))-Räumen können wir metrische Räume mit unteren Krümmungsschranken definieren.
Zunächst betrachten wir aber ein alternative Definition über Vergleichswinkel:

<u>Erinnerung</u> Zu drei Pkten x, y, z in einem metr. Raum X existiert ein Vergleichsdreieck $\Delta_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in M_k^2, wenn der Umfang des Dreiecks $\Delta(x,y,z) \leq 2D_k = 2 \cdot \pi/\sqrt{k}$ ist.

Der Winkel an $\bar{x}$ zwischen $\bar{y}$ und $\bar{z}$ wird mit $\bar{\measuredangle}^k_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$ bezeichnet.

Ist $d(x,y) + d(y,z) + d(x,z) \geq 2\pi/\sqrt{k}$ so ist der Vergleichswinkel $\bar{\measuredangle}^k_{\bar{x}}(\bar{y}, \bar{z})$ nicht definiert.

Winkel werden nur zw. 0 und π gemessen.

<u>Def. 7.1</u>

Ein 4-Tupel von Punkten x_1, x_2, x_3, p in einem metrischen Raum X erfüllt die (3+1)-Punkt-k-<u>Vergleichsbedingung</u>, wenn

einem metrischen Raum X erfüllt die

<u>(3+1)-Punkt-κ-Vergleichsbedingung</u>, wenn

$$\bar{\measuredangle}_p^{\kappa}(x_1,x_2) + \bar{\measuredangle}_p^{\kappa}(x_2,x_3) + \bar{\measuredangle}_p^{\kappa}(x_3,x_1) \leq 2\pi$$

ist, oder mindestens eines der drei Winkel nicht definiert ist.

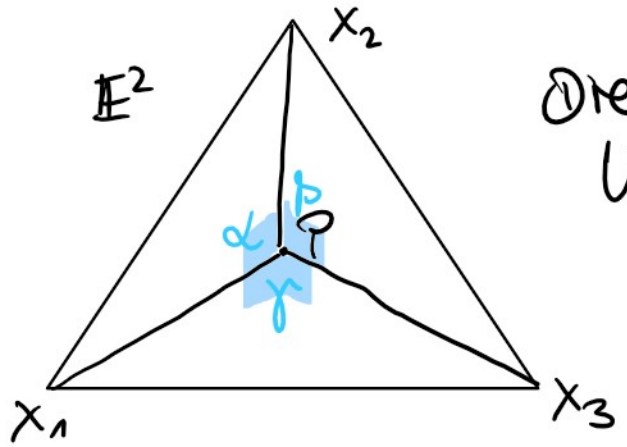
Ein vollständiger Längenraum X ist ein <u>Alexandrov-Raum mit Krümmung $\geq \kappa$</u> (kurz <u>CBB(κ)-Raum</u>), wenn alle Quadrupel von Punkten die (3+1)-Punkt-κ-Vergleichsbedingung erfüllt.

Wir sagen X ist CBB, wenn ein $\kappa \in \mathbb{R}$ existiert so, dass X ein CBB(κ)-Raum ist.

<u>Bsp.</u> a) M_κ^2 ist CBB(κ) $\forall \kappa \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{S}^2$ ist CBB(0) (und CBB(1))

c) $\mathbb{E}^2$ ist nicht CBB(1) aber CBB(0) und CBB(−1).



Dreieck mit Umfang $< 2\pi$ hat Winkelsumme $= 2\pi$ an p.

- Die Vergleichswinkel $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ in $\mathbb{S}^1$ sind alle

Die Vergleichswinkel $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ sind in S^1 größer als α, β, γ $\Rightarrow$ $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} > 2\pi$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}^2$ ist nicht CBB(1)

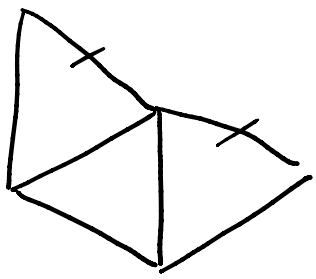
- $\mathbb{E}^2$ ist CBB(0) weil Gleichheit der Winkel
- Vergleichswinkel in $\mathbb{H}^2$ sind kleiner $\rightarrow$ $\mathbb{E}^2$ ist CBB(-1).

d) Im Allgemeinen gilt:

$CBB(K) \Rightarrow CBB(K') \quad \forall K' \leq K$

(ist aber nicht offensichtlich)

e) Verkleb 3 gleichseitige euklidische Dreiecke wie folgt:



Dann ist der daraus resultierende Raum CBB(0).

Def 7.2

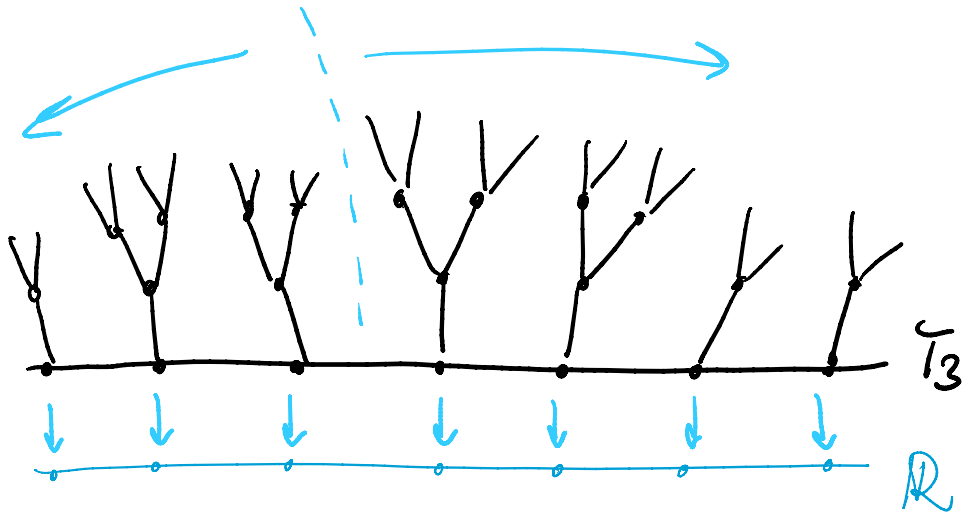
Eine Abbildung $\sigma: X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen ist eine <u>Submetrie</u>, wenn

$$\sigma(B_r^X(p)) = B_r^Y(\sigma(p)).$$

- Submetrien sind immer surjektiv.
- Isometrien sind Submetrien

- Isometrien sind Submetrien
- Folgende Abb ist eine Submetrie:

T_3 = 3-regulärer Baum $\to \mathbb{R}$



<u>Bem 7.3</u> Eine Abb $\sigma: X \to Y$ ist genau dann eine Submetrie, wenn sie 1-Lipschitz und 1-co-Lipschitz ist.

Dabei gilt:

$\varphi: X \to Y$ <u>ℓ-Lipschitz</u> gdw

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \ell \, d_X(x,y) \quad \forall x,y \in X.$$

$\varphi: X \to Y$ ist <u>1-co-Lipschitz</u> gdw

$$\varphi(B_r^X(x)) \supset B_r^Y(\varphi(x)) \quad \forall x \in X, \forall r \geq 0.$$

<u>Satz 7.4</u>

Sei X CBB(k), Y metrischer Raum. Sei weiter $\sigma: X \to Y$ Submetrie. Dann ist Y CBB(k).

<u>Beweis</u> Seien p, x_1, x_2, x_3 aus Y so, dass $\forall i$ gilt $d(p, x_i) < D_k/2$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt

<u>Beweis</u> Seien p, x_1, x_2, x_3 aus Y so, dass $\forall i$ gilt $d(p, x_i) < D_X/2$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt.

Sei $\hat{p} \in X$ mit $\sigma(\hat{p}) = p$. Weil σ eine Submetrie ist können wir Punkte $\hat{x}_i$ in X wählen, s.d. gilt:

$$d_X(\hat{p}, \hat{x}_i) < d_Y(p, x_i) + \delta \qquad (1)$$

$$\text{und } d_X(\hat{p}, \hat{x}_i) > d_Y(p, x_i) - \delta \quad \text{für alle } i.$$

Weiter gilt

$$d_Y(x_i, x_j) \overset{\text{1-co-Lipschitz}}{\leq} d_X(\hat{x}_i, \hat{x}_j) \overset{(1) \text{ und } \Delta\text{-Ungl}}{\leq} d_Y(p, x_i) + d_Y(p, x_j) + 2\delta$$

für alle i und j.

Wir können $\delta > 0$ so wählen, dass die Winkel $\overline{\measuredangle}^k_{\hat{p}}(\hat{x}_i, \hat{x}_j)$ definiert sind.

Weiter kann für ein festes $\varepsilon > 0$ das $\delta > 0$ so gewählt werden, dass $\forall ij$ gilt

$$\underbrace{\overline{\measuredangle}^k_p(x_i, x_j) < \overline{\measuredangle}^k_{\hat{p}}(\hat{x}_i, \hat{x}_j) + \varepsilon}_{(*)}.$$

Mit $(3+1)$-VB. in X gilt dann

$$\overline{\measuredangle}^k_{\hat{p}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \overline{\measuredangle}^k_{\hat{p}}(\hat{x}_2, \hat{x}_3) + \overline{\measuredangle}^k_{\hat{p}}(\hat{x}_3, \hat{x}_1) \leq 2\pi$$

(vorausgesetzt alle Winkel sind definiert).

Mit $(*)$ folgt dann:

Mit (*) folgt dann:

$$\overline{\measuredangle}_p(x_1,x_2) + \overline{\measuredangle}_p^{\mathbb{R}}(x_2,x_3) + \overline{\measuredangle}_p^{\mathbb{R}}(x_3,x_1) < 2\pi + 3\varepsilon$$

Weil ε beliebig war folgt

$$\overline{\measuredangle}_p(x_1,x_2) + \overline{\measuredangle}_p^{\mathbb{R}}(x_2,x_3) + \overline{\measuredangle}_p^{\mathbb{R}}(x_3,x_1) \leq 2\pi.$$

Damit gilt dann die $(3+1)$-VB in Y.

Bleibt noch z.z. Y ist Längenraum.
Vergleiche Prop. 7.5. $\square$

Prop. 7.5.

Sei X Längenraum und $\sigma: X \to Y$ Submetrie.
Dann ist Y ein Längenraum.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $x, y \in Y$.

Weil σ 1-co-Lipschitz ist existieren $\hat{x}, \hat{y} \in X$ mit $\sigma(\hat{x}) = x$, $\sigma(\hat{y}) = y$ und

$$d_X(\hat{x},\hat{y}) < d_Y(x,y) + \varepsilon.$$

Weil X Längenraum ist existiert eine Kurve $\gamma: \hat{x} \rightsquigarrow \hat{y}$ in X mit $\ell_X(\gamma) \leq d_Y(x,y) + \varepsilon$.

Weil σ 1-Lipschitz ist gilt:

$$\ell(\sigma \circ \gamma) \leq \ell(\gamma).$$

Die Kurve $\sigma \circ \gamma$ verläuft von x nach y in Y.
Weiter gilt: $\ell(\sigma \circ \gamma) < d_Y(x,y) + \varepsilon$.

Weiter gilt: $l(\sigma \circ \gamma) < d_Y(x,y) + \varepsilon$.
Weil ε beliebig ist folgt
$l(\sigma \circ \gamma) \leq d_Y(x,y)$ und Y ist ein Längenraum $\square$

Facts: 7.6.

1) Zwei Geodätische in einem CBB-Raum, die sich ein Intervall teilen sind Teilmenge eines gemeinsamen umgebenden Geodätischen. Insbes. verzweigen sie nicht.

2) Metrik ist konkav (analog zu konvexer Metrik in CAT(κ) Räumen)

3) Geodätische sind nicht eindeutig.

4) Zwei kürzeste Pfade, die sich in zwei Punkten a, b schneiden, haben a und b als Endpunkte.

Bem. zu Beweisen:

1) siehe Blatt 3

2) Geht ähnlich zum Beweis der Konvexität der Metrik in CAT(κ) Räumen.

3) z.B. auf S^n sind Geodätische nicht eindeutig.

nicht eindeutig.

4) gilt wegen 2) $\square$

<u>Ziel:</u> alternative Charakterisierungen für die CBB(X)-Eigenschaft finden.
Dazu brauchen wir ein paar Begriffe und Ergebnisse.

<u>Def 7.7</u> (G_δ-Mengen)

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist eine <u>G_δ-Menge</u> (oder <u>inner limiting set</u>) wenn sie als Schnitt abzählbar vieler offener Mengen geschrieben werden kann.

Offene Mengen sind (trivialerweise) G_δ-Mengen.

<u>7.8 Bairs Satz</u>

X vollst. metr. Raum, $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Familie von offenen, dichten Teilmengen in X.
Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ dicht in X.

(ohne Beweis)

<u>Bem.</u>
Im folgenden ist ein <u>Längenraum</u> ein metr. Raum X für den gilt:

Im folgenden ist ein <u>Längenraum</u> ein metr. Raum X für den gilt:

$\forall \varepsilon > 0$ und Pkte x, y in X mit $d(x,y) < \infty$ existiert ein Pfad $\alpha : x \rightsquigarrow y$ mit $l(\alpha) < d(x,y) + \varepsilon$.

<u>7.9 Bsp.</u> (ÜA)

a) Wir konstruieren einen vollständigen Längenraum in dem keine zwei Punkte durch eine Geodätische verbunden werden können.

Betrachte dazu zunächst folgende Konstruktion:

Γ sei ein Graph.
Für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ <u>definiere</u> einen <u>neuen Graphen</u> <u>$P_k(\Gamma)$</u> aus Γ <u>wie folgt</u>:
Sei Γ^b die barycentrische Unterteilung von Γ mit induzierter Metrik.
D.h.: Jede Kante $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ wird ersetzt durch zwei Kanten halber Länge: $\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet$

Für je zwei benachbarte Ecken $p, q \in \Gamma^b$ ersetze die Kante $\underset{p}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{q}{\bullet}$ durch $\mathbb{N}$-viele Kanten $\boxed{\{I_i\}_{i \geq 1}}$ der Länge $\boxed{d(p,q) + \frac{1}{2^k \cdot i} \cdot d(p,q)}$.
Wobei je ein Ende der I_i auf p bzw q geklebt wird.
Der daraus resultierende Raum $P_k(\Gamma)$ ist wieder ein metr. Graph mit einer inneren Metrik.

Sei jetzt $X_0 := [0,1] \hat{=}$ eine Kante der Länge 1

Sei jetzt $X_0 := [0,1] \hat{=}$ eine Kante der Länge 1

setze $X_k := P_k(X_{k-1})$ $\forall k \geq 1$.

Sei dann $Y_k := \{\text{Ecken in } X_k\}$ mit eingeschr. Metrik.

Dann ist die Inklusionsabbildung $Y_k \hookrightarrow Y_{k+1}$ eine isom. Einbettung.

Setze $Y_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ und $Y := \overline{Y_\infty}$ die Vervollständigung davon.

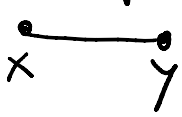
Zeigen Sie:
- Y ist ein Längenraum
- keine zwei Punkte sind durch eine geodätische verbindbar.

Bem: Wie passt das mit der approx. midpoint property zusammen?

- Vollst. metr. Raum ist ein <u>Längenr.</u> gdw $\forall x,y \in X$ & $\varepsilon > 0$ $\exists z$ s.d. $d(x,z), d(y,z) \leq \frac{1}{2} d(x,y) + \varepsilon$
- Vollst. metr. Raum ist <u>geodätisch</u> gdw $\forall x,y$ $\exists z$ s.d. $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$.

(vergl. Urs Lang „length spaces")

b) ein einfacheres Bsp:

$X =$ 

$\subseteq [0,1]$

x y

ersetze die Kante zwischen x und y durch Kanten I_n der Länge $1+\frac{1}{n}$. Der daraus resultierende Raum Y ist ein vollständiger Längenraum, nicht lokal kompakt und zwischen x und y existiert keine Geodätische.

7.10 Def.

Ein vollst. Längenraum X ist G_δ-geodätisch, wenn $\forall p \in X$ eine dichte Menge W_p existiert in X s.d. $\forall q \in W_p$ eine Geodätische $p \rightsquigarrow q$ existiert.

7.11 Satz

CBB(κ)-Räume sind G_δ-geodätisch. (o. Bew.)

7.14 Alexandrovs Lemma

p, q, r, z verschiedene Punkte in einem metr. Raum mit z auf der Geod. von p nach r.
Sei $d(p,q) + d(q,r) + d(r,p) < 2D_\kappa$
Dann haben folgende zwei Ausdrücke das selbe Vorzeichen:

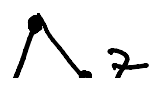
a) $\tilde{\angle}^\kappa_p(q,z) - \tilde{\angle}^\kappa_p(q,r)$ und

b) $\tilde{\angle}^\kappa_z(q,p) + \tilde{\angle}^\kappa_z(q,r) - \pi$.

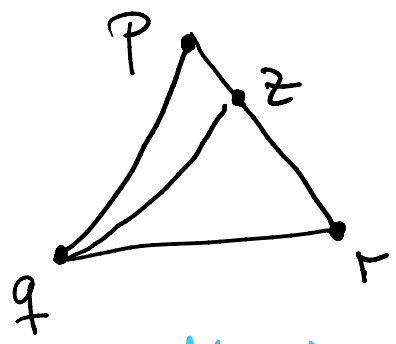
Insbesondere gilt

$$\tilde{\angle}^\kappa_q(p,r) \geq \tilde{\angle}^\kappa_q(p,z) + \tilde{\angle}^\kappa_q(z,r)$$

mit „=" gdw die Ausdrücke a) und b) verschwinden.



[verschwinden.



<u>Beweis:</u>

Mit Dreiecksungl. folgt direkt

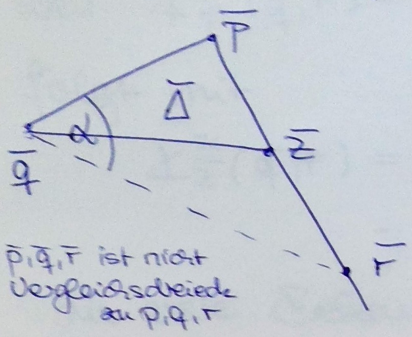
$$D_\alpha > d(p,q) + \underline{d(q,r)} + d(r,p) = d(p,z) + \cancel{d(z,r)}$$

$$\geq d(p,q) + \underline{d(q,z) - \cancel{d(z,r)}} + d(r,p)$$

$$= d(p,q) + d(q,z) + d(p,z).$$

Somit existiert ein Vergleichsdreieck für $\Delta(p,q,z)$, bez. mit $\bar{\Delta}(\bar{p},\bar{q},\bar{z})$, in $\mathbb{R}^2_\kappa$.

Betrachte einen Punkt $\bar{r}$ auf der Verlängerung der Strecke $\bar{p}\bar{z}$ jenseits von $\bar{z}$ so, dass $d(\bar{p},\bar{r}) = d(p,r)$.



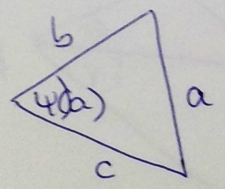
! $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ ist nicht Vergleichsdreieck zu p,q,r

$\bar{\Delta}$ = Vergl.ds. von $\Delta(p,q,r)$

Nach Wahl von $\bar{z},\bar{r}$ ist $d(\bar{p},\bar{r}) = d(\bar{p},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{r})$.

Sei $\varphi: \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,\pi]$ die Funktion, die für festes κ, b, c ~~den~~ folgendes misst:

$$\varphi(a) = \begin{cases} \text{Winkel gegenüber Seite mit Länge } a \text{ in einem Dreieck in } M_\kappa^d \text{ mit Seitenlängen } a,b,c & \text{sofern das Dreieck def. ist} \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$$



Schreibe auch $\varphi(a) =: \tilde{\measuredangle}^\kappa(a;b,c)$.

φ ist monoton wachsend in a für $a \in I = [0,t]$ $\quad t = b+c$.

Mit dieser Überlegung können wir zeigen, dass folgende Ausdrücke das selbe VZ haben:

(i) $\underbrace{\tilde{\measuredangle}^\kappa_{\bar{p}}(\bar{q},\bar{r})}_{\text{nicht Vergleichswinkel im Vergl.dreieck zu } \bar{q},\bar{r},\bar{p} \text{ sondern Winkel } \alpha \text{ im Bild oben}}$ $\quad - \quad$ $\underbrace{\bar{\measuredangle}^\kappa_p(q,r)}_{\text{Winkel im Vergleichsdreieck gegenüber der zu } q,r \text{ passenden Seite}}$

(ii) $|\bar{p}\bar{r}| = |pr|$

(iii) $\measuredangle^{\kappa}_{\bar{z}}(\bar{q},\bar{r}) = \bar{\measuredangle}^{\kappa}_{z}(q,r)$

Weil $\measuredangle^{\kappa}_{\bar{p}}(\bar{q},\bar{r}) = \measuredangle^{\kappa}_{\bar{p}}(\bar{q},\bar{z}) = \bar{\measuredangle}^{\kappa}_{p}(q,z)$

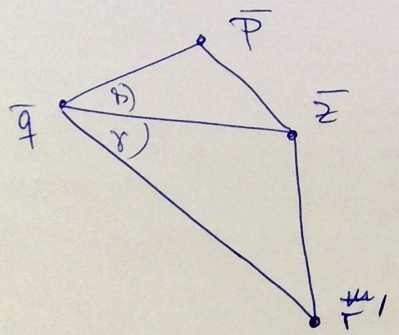
folgt mit

$$\measuredangle^{\kappa}_{\bar{z}}(\bar{q},\bar{r}) = \pi - \measuredangle^{\kappa}_{\bar{z}}(\bar{p},\bar{q})$$
$$= \pi - \bar{\measuredangle}^{\kappa}_{z}(p,q)$$

die erste Behauptung.

Für die zweite Beh:

konstruiere zum oben konstruierten Dreieck $\bar{p}\bar{q}\bar{z}$ auf der anderen Seite von $\bar{q}\bar{z}$ ein Dreieck $\Delta(\bar{q},\bar{z},r')$ das Vergleichsdreieck zu $\Delta(q,z,r)$ ist.



Es ist $d(\bar{p},r') \leq d(\bar{p},\bar{z}) + d(\bar{z},r')$
$= d(p,z) + d(z,r) = d(p,r).$

$$\Rightarrow \underbrace{\bar{\measuredangle}^{\kappa}_{q}(p,z)}_{\beta} + \underbrace{\bar{\measuredangle}^{\kappa}_{q}(z,r)}_{\gamma} = \measuredangle^{\kappa}_{\bar{q}}(\bar{p},\bar{z}) + \measuredangle^{\kappa}_{\bar{q}}(\bar{z},r')$$
$$= \measuredangle^{\kappa}_{\bar{q}}(\bar{p},r')$$
$$\leq \bar{\measuredangle}^{\kappa}_{q}(p,r).$$

Monotonie in gegenüberl. Seite

„=" gilt, wenn $d(p,r) = d(\bar{p},r')$. $\square$

Satz 7.13

Sei X ein vollständiger Längenraum. Dann ist X genau dann CBB(κ), wenn gilt:

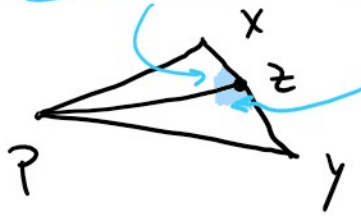
Sei X ein vollständiger Längenraum. Dann ist X genau dann $\underbrace{\mathrm{CBB}(\kappa)}_{(a)}$, wenn gilt:

X ist G_δ-geodätisch und eine der folgenden Bedingungen ist für alle $p, x, y \in X$ erfüllt sofern das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}^\kappa(p,x,y)$ existiert:

(b) (benachbarte-Winkel-Bedingung)

Für jede Geodätische $c: x \rightsquigarrow y$ und jedes z auf c mit $z \notin \{p,x,y\}$ gilt:

$$\underbrace{\bar{\measuredangle}^\kappa_z(p,x)} + \underbrace{\bar{\measuredangle}^\kappa_z(p,y)} \leq \pi$$



(c) (Punkt-auf-Seite-Bedingung)

Für jede Geodätische $c: x \rightsquigarrow y$ und jedes z auf c mit $z \notin \{x,y\}$ gilt:

$$\bar{\measuredangle}^\kappa_x(p,y) \leq \bar{\measuredangle}^\kappa_x(p,z)$$

oder, äquivalent dazu:

$$d(\bar{p},\bar{z}) \leq d(p,z)$$

wobei $\bar{\Delta}^\kappa(\bar{p},\bar{x},\bar{y})$ Vergleichsdreieck zu $\Delta(p,x,y)$ und $\bar{z}$ Vergleichspunkt auf der Geodätischen $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ zu z.

<u>Beweis</u>

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei z auf einer Geodätischen von x nach y. Dann ist $\bar{\measuredangle}^\kappa_z(x,y) = \pi$.

von x nach y. Dann ist $\tilde{\measuredangle}_z^k(x,y) = \pi$.

Also ist mit (3+1)-VB:

$$\tilde{\measuredangle}_z^k(x,y) + \tilde{\measuredangle}_z^k(p,x) + \tilde{\measuredangle}_z^k(p,y) \leq 2\pi$$

dann folgende Gleichung erfüllt:

$$\tilde{\measuredangle}_z^k(p,x) + \tilde{\measuredangle}_z^k(p,y) \leq \pi.$$

(b) $\Leftrightarrow$ (c) folgt aus Alexandrov Lemma.

(c) $\Rightarrow$ (a) ist komplizierter.
(wir lassen das weg). $\square$

7.13 Offene Frage (* notw. & hinreichend)

Finde Bedingungen* für eine endliche Menge von Punkten mit paarweise festen Abständen s.d. diese in einen CBB(k) bzw. CAT(k)-Raum eingebettet werden können.

7.14 Satz (Cohn-Bow)

X vollständiger CBB(1)-Raum.
Dann ist entweder
a) $\operatorname{diam}(X) \leq \pi$ oder
b) X eine der folgenden 4 Ausnahmen:

$\mathbb{R}$; Strahl $[a, \pm\infty)$ in $\mathbb{R}$; ein Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$ mit $a > \pi$ oder
ein Kreis S_a^1 mit Umfang $a > 2\pi$.