<u>Beweis</u>: Sei (x_n) Folge in X mit x_0 beliebig und $x_{n+1} := f(x_n)$ $\forall n \geq 0$.

Betrachte zunächst

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \quad (*)$$
$$\leq \lambda^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Wir wollen zeigen, dass (x_n) Cauchy-Folge ist: sei OE $m > n$

$$d(x_m, x_n) \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n).$$
$$\underset{(*)}{\leq} \lambda^{m-1} \cdot d(x_1, x_0) + \lambda^{m-2} d(x_1, x_0) + \dots + \lambda^n d(x_1, 0).$$
$$= \lambda^n \cdot d(x_1, x_0) \cdot \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^k$$

Reihe länger machen

$$\leq \lambda^n d(x_1, x_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$$
$$= \lambda^n \cdot d(x_1, x_0) \cdot \left(\frac{1}{1-\lambda}\right) = \otimes$$

Wir müssen zeigen, dass $\otimes$ beliebig klein wird für m, n groß.

Weil $\lambda \in (0,1)$ finden wir n_0 s.d.

$$\lambda^n < \varepsilon \cdot \frac{(1-\lambda)}{d(x_1, x_0)} \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$d(x_1, x_0)$

$\Rightarrow$ (x_n) ist Cauchy Folge und besitzt in X einen Fixpunkt p.

Es ist dann $p = \lim_{n\to\infty} x_n$ und daher

$$f(p) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

geht weil f stetig ist

Sei p' zweiter Fixpunkt von f so gilt:

$$d(f(p), f(p')) = d(p, p')$$

$p = f(p)$
$p' = f(p')$

$\lightning$ zu $\lambda < 1$ $\square$

Jetzt noch etwas über kompakte metrische Räume:

Def 1.16

Ein topologischer (insbes. metrischer) Raum X ist <u>kompakt</u>, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Beispiel 1.17

Eigenschaften 1.17

1) (Heine-Borel Satz)
Eine Teilmenge eines euklidischen Raumes ist kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
2) Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.
3) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen.
4) Jedes kompakter metrischer Raum ist vollständig.

Achtung:
Ein kompaktes metrisches Raum kann nicht zu einer echten Teilmenge von sich isometrisch sein.
D.h. (X,d) kompakter metr. Raum, $f: X \to X$ abstandserhaltend, dann ist f auch surjektiv (also $f(X) = X$).

ÜA 1.18

ÜA 1.18

(X,d) kompaktes metrischer Raum.
Dann gilt:

1. Ist die Metrik auf X endlich (d.h. $d(x,y) < \infty \ \forall x,y \in X$) so hat X endlichen Durchmesser.
2. Es gibt Punkte $x,y \in X$ mit $\operatorname{diam} X = d(x,y)$.

ÜA 1.19

Ein metrischer Raum X mit potentiell unendl. Abständen ist genau dann kompakt, wenn X Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen ist auf denen die Abstandsfkt endlich ist.