CHARAKTERISIERUNG DER RIEMANNSCHEN HYPOTHESE MIT HILFE EINES HILBERTSCHEN FOLGENRAUMES

MATTHIAS KUNIK

Zusammenfassung. Wir untersuchen einen Hilbertschen Folgenraum, mit dessen Hilfe wir sowohl zahlentheoretische Darstellungen gewisser Fourier-Reihen herleiten als auch eine einfach zu formulierende funktionalanalytische Charakterisierung der Riemannschen Hypothese erhalten. Die hierfür benötigten Hilfsmittel der Funktionentheorie und Funktionalanalysis werden im Anhang dieser Arbeit ebenfalls ausgeführt.

1. Einleitung

In der Zahlentheorie hat man es gelegentlich mit nicht orthogonalen Vektoren bzw. Funktionen eines Hilbertraumes zu tun. Dies kann zu interessanten Approximationsproblemen mit den Linearkombinationen dieser Vektoren führen.

Als Beispiel betrachten wir den komplexen Hilbertraum $L^2(0,1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt\,,$$

in dem wir für $\alpha \geq 1$ die Funktionenfamilie $g_\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}$ definieren mit

$$g_\alpha(t) := \frac{1}{\alpha}\lfloor\frac{1}{t}\rfloor - \lfloor\frac{1}{\alpha\, t}\rfloor\,. \tag{1.1}$$

Nach einem klassischen Theorem von Nyman [18] gilt die Riemannsche Hypothese (RH)

$$\zeta(s) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2} \quad \text{im Halbraum } \mathrm{Re}(s) > 0$$

genau dann, wenn die konstante Funktion 1 in der $L^2(0,1)$-Norm beliebig genau mit den Linearkombinationen der Funktionen g_α approximierbar ist.

Wir bezeichnen den Abschluss der Linearkombinationen aller Funktionen g_α für $\alpha \geq 1$ in $L^2(0,1)$ mit **NB**. Es sei g_* die orthogonale $L^2(0,1)$-Projektion der konstanten Funktion 1 auf den Unterraum **NB**. Burnol hat in [7] gezeigt, dass für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ gilt:

$$\int_0^1 x^{s-1} g_*(x)\,dx = B(1)\frac{B(s)}{s}\,. \tag{1.2}$$

Datum: 29. November 2010.

Schlüsselwörter. Funktionentheorie, Dirichletreihen, Riemannsche Zetafunktion, Hardyräume.

Hierbei ist

$$B(s) := \prod_{\substack{\rho\,:\,\zeta(\rho)=0 \\ \mathrm{Re}\,(\rho)>1/2}} \left\{ \frac{1-\dfrac{s}{\rho}}{1-\dfrac{s}{1-\overline{\rho}}} \cdot \left|\frac{\rho}{1-\rho}\right| \right\}$$

das Blaschke-Produkt mit den nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion ausserhalb der kritischen Geraden, wobei Nullstellen gemäss ihrer Vielfachheit gezählt werden. Durch Anwendung der Mellinschen Umkehrformel in (1.2) lässt sich somit auch g_* mit Hilfe von $B(s)$ berechnen. Für $B(1)$ hat man die Darstellung

$$B(1) = \prod_{\substack{\rho\,:\,\zeta(\rho)=0 \\ \mathrm{Re}\,(\rho)>1/2}} \left|\frac{1-\rho}{\rho}\right| \leq 1\,.$$

Hiermit lässt sich auch noch die $L^2(0,1)$-Norm der gesuchten orthogonalen Projektion g_* einfach darstellen, es ist

$$\left(\int_0^1 |g_*(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = B(1)\,, \tag{1.3}$$

wobei $B(1) = 1$ offenbar zur Riemannschen Hypothese äquivalent ist. Diese Resultate von Burnol stellen mithin eine Verfeinerung des Nymanschen Theorems dar, für deren Herleitung neben dem Paley-Wiener Theorem 4.2 im Anhang dieser Arbeit noch entscheidend die Theorie von Beurling und Lax zu den invarianten Hardy-Hilberträumen verwendet wird, siehe hierzu das Lehrbuch von Hoffman [10, Chapter 7, The Shift Operator] sowie die Originalarbeiten von Beurling [5] und Lax [16].

Das Resultat von Nyman wurde von Beurling in [6] auf eine Charakterisierung der Nullstellenfreiheit der ζ-Funktion in $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{p}$ im Rahmen der L^p-Räume ausgedehnt.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir Approximationsprobleme mit komplexen Zahlenfolgen $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Hilbertraumes

$$\mathcal{H} := \{\, (x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n(n+1)} < \infty \,\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$[(x_n)\,,\,(y_n)]_{\mathcal{H}} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n\,\overline{y_n}}{n(n+1)} \tag{1.4}$$

und der zugehörigen Norm

$$|(x_n)|_{\mathcal{H}} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{1.5}$$

In Abschnitt 2 betrachten wir im Rahmen des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ zahlentheoretische Darstellungen mit Fourier-Reihen bestimmter $L^2(0,1)$-Funktionen, wobei die Dämpfungsfaktoren $\frac{1}{n(n+1)}$ in (1.4) und (1.5) durch $\frac{1}{n^2}$ ersetzt werden, was zu einem gegenüber (1.4) modifizierten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ mit einer zu (1.5) äquivalenten Norm $||\cdot||_{\mathcal{H}}$ führt.

Die Ausführungen in Abschnitt 2 sind von denen im Abschnitt 3 weitgehend unabhängig. In Abschnitt 3 präsentieren wir mit Satz 3.4 bzw. Folgerung 3.1 eine auf Báez-Duarte [1] zurückgehende Variante des Nymanschen Theorems, die den Folgenraum $\mathcal{H}$ mit dem Skalarprodukt (1.4) verwendet. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ den Unterhilbertraum von $L^2(0,1)$, der aus allen Funktionen $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ besteht, so dass $f(t)=x_n$ auf allen Teilintervallen $\frac{1}{n+1}<t\le\frac{1}{n}$ mit $t\in(0,1)$ und $n\in\mathbb{N}$ konstant ist. Aus der Beziehung

$$\int_0^1 |f(t)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|^2}{n(n+1)}$$

folgt zunächst, dass die beschriebene Zuordnung der Koeffizientenfolge $(x_n)\in\mathcal{H}$ zu gegebenem $f\in\mathcal{M}$ ein isometrischer Isomorphismus $\Theta_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\to\mathcal{H}$ zwischen den Räumen $\mathcal{M}$ und $(\mathcal{H},|.|_{\mathcal{H}})$ ist. Nun gilt noch $g_k\in\mathcal{M}$ für $\alpha=k\in\mathbb{N}$ in (1.1), und die Aussage des Satzes 3.4 im Abschnitt 3 kann mit Verwendung des isometrischen Isomorphismus $\Theta_{\mathcal{M}}$ als die Äquivalenz der folgenden drei Behauptungen gedeutet werden:

(i) Es gilt die Riemannsche Hypothese.
(ii) Die konstante Funktion 1 ist im Hilbertraum $\mathcal{M}$ beliebig genau mit den Linearkombinationen der g_k approximierbar, wobei $k\in\mathbb{N}$ ist.
(iii) Für $k\in\mathbb{N}$ liegen die Linearkombinationen der Funktionen g_k dicht in $\mathcal{M}$.

Báez-Duartes Ansatz in [1] wurde erst in der Arbeit von Bagchi [3] in dieser Weise klar formuliert und beweistechnisch erweitert, die Resultate aus [1] und [3] sind daher in unseren folgenden Betrachtungen bereits berücksichtigt. Zudem leiten wir in Abschnitt 3 dieser Arbeit den entscheidenden Satz 3.3 her, dessen Aussage ohne Beweis in Bagchi [3], Lemma 3 formuliert wird. Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ führen wir neben dem Einheitsvektor

$$\underline{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$$

noch eine Folge $(\underline{d}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von k-periodischen Spaltenvektoren $\underline{d}_k$ ein:

$$\underline{d}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\\vdots\end{pmatrix},\ \underline{d}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\1\\2\\\vdots\end{pmatrix},\ \underline{d}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix},\ \ldots.$$

Wir erhalten damit in der vorliegenden Arbeit die einfache Folgerung 3.1 aus dem Satz 3.4, welche die Äquivalenz der folgenden drei Behauptungen garantiert:

(i)' Es gilt die Riemannsche Hypothese.
(ii)' Der Vektor $\underline{e}_1$ ist im Hilbertraum $\mathcal{H}$ beliebig genau mit den Linearkombinationen der Vektoren $\underline{d}_k$ approximierbar.
(iii)' Die Linearkombinationen der $\underline{d}_k$ liegen dicht in $\mathcal{H}$.

Es handelt sich bei dem Satz 3.4 um eine Folgenraum-Variante des Nymanschen Theorems, wobei der reelle Parameter $\alpha \geq 1$ in (1.1) auf die natürlichen Zahlen beschränkt wird. Hierbei wäre es sehr interessant, für die orthogonale Projektion der konstanten Funktion 1 auf denjenigen Unterhilbertraum von $\mathcal{M}$, der für $k \in \mathbb{N}$ von den Linearkombinationen der g_k erzeugt wird, ein Analogon zu den Gleichungen (1.2) bzw. (1.3) zu finden.

2. Fourier-Reihen mit zahlentheoretischen Koeffizienten

Es sei $\mathcal{F} = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$ die kommutative Algebra der arithmetischen Funktionen mit den üblichen linearen Operationen $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{F}$. Die (Dirichletsche) Faltung $* : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ist

$$(f * g)(n) = \sum_{d\,|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

und die Einheit $\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit $\varepsilon(1) = 1$ bzw. $\varepsilon(n) = 0$ für $n \geq 2$ erfüllt

$$f * \varepsilon = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}\,.$$

Wir schreiben die arithmetischen Funktionen oft als Zahlenfolgen, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Eine arithmetische Funktion $f \in \mathcal{F}$ heisst multiplikativ, wenn $f(1) = 1$ und $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ gilt. [1] Wichtige multiplikative Funktionen sind neben der Einheit ε die Identität I mit $I(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Möbiusfunktion μ und die Eulerfunktion φ. Bezüglich der Dirichletschen Faltung bilden die multiplikativen Funktionen eine Gruppe mit der Funktion ε als Einselement. Bezeichnen wir hier das zu f inverse Gruppenelement mit f^{-1}, so gilt insbesonders $1 * \mu = I * (\mu I) = \varepsilon$ und $1 * \varphi = I$, so dass $1^{-1} = \mu$, $I^{-1} = \mu I$ und $\varphi = \mu * I$ folgen.

Definition 2.1. Wir betrachten zunächst zwei einfache Folgenräume:

(i) Der Hilbertsche Folgenraum l^2 besteht aus allen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ mit

$$||x||_{l^2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{l^2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}\,.$$

(ii) Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Zahlenfolgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ mit

$$||x||_{\mathcal{H}} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Ist noch $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, so wird $\mathcal{H}$ zum Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \overline{y_n}}{n^2}\,.$$

[1] Mit (m, n) bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen m und n.

Bemerkung 2.1. Die Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ sind also durch die einfache Bedingung $(\frac{x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ charakterisiert.

Definition 2.2. Wir führen die folgenden beiden Hilbertschen Funktionenräume ein:

(i) Die Funktionen $f \in L^2(0,1)$ versehen wir mit der Norm

$$||f||_- := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Es bezeichne U den Unterhilbertraum aller $L^2(0,1)$-Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = -f(1-t)$ für fast alle $t \in (0,1)$, d.h. die 1-periodische Fortsetzung von f sei eine ungerade Funktion.

(ii) Die Funktionen $g \in L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ versehen wir mit der Norm

$$||g||_+ := \left(\int_1^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Bemerkung 2.2. Diese Funktionenräume spielen eine wichtige Rolle für die Formulierung der Paley-Wiener Sätze im Anhang. Hier verwenden wir sie, um den Hilbertschen Folgenraum $\mathcal{H}$ sowohl in U als auch $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ einzubetten, und erhalten sofort aus den vorangegangenen Definitionen:

Satz 2.1. Einbettung von $\mathcal{H}$ in U bzw. $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$

Die Formen $Q_E, Q : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$Q_E(y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{|y_n|^2}{n^2} \; , \; Q(y) := \sum_{n=1}^\infty \frac{|y_n|^2}{n(n+1)} \; , \; Q(y) \le Q_E(y) \le 2Q(y) \, ,$$

führen zu äquivalenten Normen $||\cdot||_{\mathcal{H}} = \sqrt{Q_E}$ bzw. $|\cdot|_{\mathcal{H}} := \sqrt{Q}$ auf $\mathcal{H}$.

(i) *Zu jedem $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ definieren wir die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in U$ gemäß*

$$f(t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n} \sin(2\pi n t) \, .$$

Dann gilt $||f||_- = ||x||_{\mathcal{H}}$. Umgekehrt läßt sich jedes $f \in U$ so darstellen.

(ii) *Zu jedem $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ lässt sich $g \in L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ konstruieren gemäß $g(x) := y_n$ für $n < x \le n+1$, $n \in \mathbb{N}$, wobei gilt:*

$$||g||_+^2 = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{|g(x)|^2}{x^2} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{|y_n|^2}{x^2} \, dx = Q(y) < \infty \, ,$$

so dass wir $\mathcal{H}$ als Unterhilbertraum von $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ interpretieren können.

In diesem Abschnitt untersuchen wir gemäß der Einbettung von $\mathcal{H}$ in U Fourier-Reihen, deren Koeffizienten zahlentheoretische Funktionen sind. Dagegen wird die Einbettung von $\mathcal{H}$ in $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ erst im folgenden Abschnitt betrachtet, um die Riemannsche Hypothese mit Hilfe einer Approximationshypothese in $\mathcal{H}$ zu charakterisieren. Die nun folgenden Betrachtungen sind gegenwärtig noch unabhängig von den Untersuchungen in Abschnitt 3, und können von denjenigen Lesern, die nur an der Folgenraum-Variante des Nymanschen Theorems interessiert sind, auch übersprungen werden:

Mit der Teilbarkeitsfunktion $\vartheta : \mathbb{N}^2 \to \{0,1\}$,

$$\vartheta(k,j) := \begin{cases} 1\,, & \text{für } k|j\,, \\ 0\,, & \text{für } k \not| \, j\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

definieren wir $\underline{a}_k \in \mathcal{F}$ gemäß

$$\underline{a}_k(j) := \vartheta(k,j)\ ,\ \ k,j \in \mathbb{N}\,,$$

und schreiben die $\underline{a}_k$ als k-periodische Spaltenvektoren gemäß

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \ldots \text{usw.}$$

Diese bilden eine Matrix $A = (a_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}} = (\vartheta(k,j))_{j,k\in\mathbb{N}}$. Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ führen wir mit den Vektoren

$$\underline{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \underline{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \underline{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}\ ,\ \ldots \text{usw.}$$

eine Standardbasis ein, die die Einheitsmatrix $E = (\delta_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ bilden. Die Vektoren $\underline{e}_n$ sind orthogonal, wegen $||\underline{e}_n||_{\mathcal{H}} = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, aber nicht normiert. Die Matrix $B = (b_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit $b_{jk} := \vartheta(k,j)\mu\left(\left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor\right)$, $\mu(0) := 0$, ist dann zu A invers, ebenso gilt dies für die Teilmatrizen von A und B bestehend aus den ersten n Zeilen und Spalten, also insgesamt

$$A \cdot B = B \cdot A = E\,, \qquad \sum_{\substack{m=1 \\ k|m,\, m|j}}^{n} \mu\left(\frac{m}{k}\right) = \delta_{jk} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \forall j,k \in \{1,...,n\}\,, \tag{2.2}$$

wobei die Matrizenprodukte wie für endliche $n \times n$ Matrizen definiert sind, da in den Zeilen von A und B nur jeweils endlich viele Einträge von Null verschieden sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & -1 & -1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\,.$$

Wir bezeichnen die Matrizen $A, B = A^{-1}$ auch als „Transformationsmatrizen“:

$$T_{E,A} := A \quad , \quad T_{A,E} := B = A^{-1}\,.$$

Satz 2.2. *Es sei* $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)^T \in \mathcal{F}$ *als Spaltenvektor geschrieben, und* $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, ...)^T$ *mit* $\underline{y} := \underline{x} * \mu$. *Es möge* $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$ *gelten. Dann liegen auch* $\underline{x}$ *und* $\underline{y}$ *in* $\mathcal{H}$ *und es gilt:*

(i) $\underline{x} = T_{E,A} \cdot \underline{y}$, *d.h.* $x_n = \sum_{d|n} y_d\,, \quad n \in \mathbb{N}$,
$\underline{y} = T_{A,E} \cdot \underline{x}$, *d.h.* $y_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) x_d\,, \quad n \in \mathbb{N}$,
wobei das Produkt „Matrix · Vektor“ analog zum Endlichdimensionalen erklärt und wohldefiniert ist.

(ii) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \underline{a}_n$ *konvergiert in* $\mathcal{H}$ *gegen* $\underline{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \underline{e}_n$.

(iii) $Q_E(\underline{x}) = Q_A(\underline{y}) = Q_E(\underline{y} * 1)$ *mit der absolut konvergenten Doppelreihe*

$$Q_A(\underline{y}) := \frac{\pi^2}{6} \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{(j,k)^2}{j^2 \cdot k^2}\, y_j\, \overline{y}_k\,.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die k-te Komponente von $\big(|y_n|\big)_{n\in\mathbb{N}} * 1$ gegeben durch $\sum_{d|k} |y_d|$, also gilt zum einen $\sum_{d|k} |y_d| \ge |y_k|$ mit $\underline{y} \in \mathcal{H}$, und zum anderen $|x_k| = \Big|\sum_{d|k} y_d\Big| \le \sum_{d|k} |y_d|$ mit $\underline{x} \in \mathcal{H}$, wobei (i) bereits ohne Konvergenzannahmen aus der Definition von $T_{E,A}$ bzw. $T_{A,E}$ mit der Möbiusschen Umkehrformel folgt.
(ii) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt zum einen

$$\Big(\sum_{k\le N} y_k \underline{a}_k\Big)(j) = \sum_{\substack{k\le N\\ k|j}} y_k \quad \text{mit } j \in \mathbb{N}\,,$$

und das ist nach (i) für alle $j \le N$ genau x_j, während für alle $j \ge N+1$ die Abschätzung

$$\Big|\sum_{\substack{k\le N\\ k|j}} y_k\Big| \le \sum_{\substack{k\le N\\ k|j}} |y_k| \le \sum_{k|j} |y_k|$$

besteht, so dass gilt

$$\Big|\Big|\sum_{k\le N} y_k\, \underline{a}_k - \underline{x}\Big|\Big|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cdot \Big|\sum_{\substack{k\le N\\ k|j}} y_k - x_j\Big|^2$$

$$\le \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cdot \Big(\sum_{k|j} |y_k|\Big)^2 + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{|x_j|^2}{j^2} + 2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\sum_{k|j} |y_k|}{j} \cdot \frac{|x_j|}{j}\,.$$

Alle drei Summen verschwinden gemäß der Annahme $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$ im Limes $N \to \infty$, für die letzte Summe folgt dies aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in l^2.
(iii) Es sei für alle natürlichen Zahlen j, k die Teilmenge

$$\mathbb{N}_{jk} := \{n \in \mathbb{N} \,|\, j|n \;\&\; k|n\}$$

natürlicher Zahlen definiert. Ist dann $c = (j,k)$, so folgt

$$\mathbb{N}_{jk} = \left\{ \frac{j \cdot k}{c} \cdot m \mid m \in \mathbb{N} \right\} ,$$

und hiermit

$$\begin{aligned} Q_E(\underline{x}) &= Q_E(T_{E,A}\,\underline{y}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\substack{j|n \\ k|n}} y_j\,\overline{y}_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{N}_{jk}} \frac{y_j\,\overline{y}_k}{n^2} \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(j,k)^2}{m^2 j^2 k^2} y_j\,\overline{y}_k = Q_A(\underline{y}) \end{aligned}$$

unter Beachtung von $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und von $\big(|y_n|\big)_{n\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$, wonach die Doppelreihe absolut konvergiert und umsummiert werden kann. $\square$

Betrachte nun die 1-periodische Sägezahnfunktion β mit $\beta(0) = 0$ und $\beta(t) = t - \frac{1}{2}$, $0 < t < 1$. Sie hat die Fourier-Entwicklung

$$\beta(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi a t)}{a} , \qquad t \in \mathbb{R} . \tag{2.3}$$

Satz 2.3. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungsweisen von Satz* 2.2 *gilt im Sinne der* $L^2(0,1)$*-Konvergenz:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k} \beta(kt) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \sin(2\pi n t) .$$

Bemerkung 2.3. Es ist hier $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{H}$ sowie $\big(|y_n|\big)_{n\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$ mit $\underline{x} = 1 * \underline{y}$. Es ist insbesonders $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.

Beweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach Gleichung (2.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k \le N} \frac{y_k}{k} \beta(kt) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k \le N} \frac{y_k}{k} \cdot \sum_{a=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi a k t)}{a} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{k \le N} y_k \cdot \frac{\sin(2\pi a k t)}{a \cdot k} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{k \le N \\ k|n}} y_k \Bigg) \cdot \frac{\sin(2\pi n t)}{n} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n \le N} x_n \cdot \frac{\sin(2\pi n t)}{n} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Bigg(\sum_{\substack{k \le N \\ k|n}} y_k \Bigg) \cdot \frac{\sin(2\pi n t)}{n} . \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \Big| \sum_{\substack{k\le N\\ k|n}} y_k \Big|^2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \Big(\sum_{k|n} |y_k| \Big)^2 \xrightarrow{N\to\infty} 0\,.$$

□

Beispiel 2.1. $\underline{y} = \varepsilon$, $\underline{x} = 1$ liefert Gleichung (2.3).

Beispiel 2.2. $\underline{y} = \mu$, $\underline{x} = \varepsilon$ liefert im Sinne der $L^2(0,1)$-Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \beta(kt) = -\frac{1}{\pi} \sin(2\pi t)\,.$$

Beispiel 2.3. $y_n = -\mu(n)\log(n)$, $x_n = \Lambda(n)$, $n \in \mathbb{N}$, liefert im Sinne der $L^2(0,1)$-Konvergenz:

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\log(n)}{n} \beta(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} \sin(2\pi nt)\,. \tag{2.4}$$

Hierbei ist die Mangoldt-Funktion folgendermassen definiert:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p\,, & n = p^\alpha \text{ eine Primzahlpotenz mit } \alpha \in \mathbb{N}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Die rechts stehende Sinusreihe in (2.4) wurde in der Arbeit [15] von Kunik und Lucht ausführlich untersucht.

Beispiel 2.4. Für alle $j, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 \beta(jt)\beta(kt)\,dt = \frac{1}{12} \cdot \frac{(j,k)^2}{j \cdot k}\,.$$

Diese $L^2(0,1)$-Skalarprodukte spielen eine Rolle im Beweis des Satzes von Franel-Landau zur Charakterisierung der Riemannschen Hypothese, siehe Edwards [8, Chapter 12.2].

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und fest gewählte Zahlen $j, k \in \mathbb{N}$ definiere man

$$x_n = \begin{cases} j\,, & j|n \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \tilde{x}_n = \begin{cases} k\,, & k|n \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}, \quad y_n = \begin{cases} j\,, & n = j \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \tilde{y}_n = \begin{cases} k\,, & n = k \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die zugehörigen Vektoren $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{\tilde{x}} = (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\underline{\tilde{y}} = (\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.2 bzw. Satz 2.3. Es folgt aus Satz 2.3 mit der Orthogonalitätsrelation der Sinus-Funktionen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \beta(jt)\beta(kt)\,dt &= \frac{1}{2\pi^2} \langle \underline{x}, \underline{\tilde{x}} \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{n=1\\ j|n,k|n}}^{\infty} \frac{j\cdot k}{n^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(j,k)^2}{j^2 \cdot k^2} \cdot \frac{j \cdot k}{m^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{(j,k)^2}{j \cdot k} = \frac{1}{12} \cdot \frac{(j,k)^2}{j\cdot k}\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.5. Wir definieren für alle natürlichen Zahlen n und a die *Ramanujan-Summen*

$$c_n(a) := \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} e^{2\pi i \frac{k}{n} a} = \sum_{\substack{k=1\\(k,n)=1}}^{n} \cos\left(\frac{2\pi ka}{n}\right),$$

wobei $c_n(\cdot)$ bei festem $n \in \mathbb{N}$ eine n-periodische Folge ist. Definieren wir

$$\eta_a(n) := \begin{cases} n & \text{für } n \mid a, \\ 0 & \text{für } n \nmid a, \end{cases}$$

so erhält man aus $1 * c_{\bullet}(a) = \eta_a$ durch Faltung mit der Möbiusschen Funktion die Beziehung

$$c_n(a) = (\mu * \eta_a)(n), \tag{2.5}$$

woraus speziell $c_n(a) = \mu(n)$ für $(n,a) = 1$ folgt. Allgemeiner findet man die als Höldersche Relation bekannte geschlossene Darstellung

$$c_n(a) = \frac{\mu(n/(n,a))\,\varphi(n)}{\varphi(n/(n,a))}.$$

Für einen auf (2.5) basierenden Beweis siehe Knopfmacher [11, Chapter 7, Lemma 2.5]. Definiert man für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ die $L^2(0,1)$-Funktionen

$$q_n(t) := -\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \beta(dt),$$

so hat man speziell $q_1 = -\beta$, und Satz 2.3 liefert zusammen mit der Gleichung (2.5) für alle q_n die folgende Darstellung als Sinus-Fourier-Reihe mit den Ramanujan-Summen:

$$q_n(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{c_n(a)}{a} \sin(2\pi at).$$

Die Funktionen q_n beschreiben die Schwankungen in der Verteilung der gekürzten Brüche $\frac{k}{n}$ mit festem Nenner n, genauer ist für $n \geq 2$ und reelles $t \in (0,1)$ mit $nt \notin \mathbb{N}$ durch $q_n(t) + t\varphi(n)$ die Anzahl der Brüche $\frac{k}{n}$ mit $(k,n) = 1$ und $0 < \frac{k}{n} < t$ gegeben.

Lemma 2.1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die $n \times n$-Matrix $C(n) = (c_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$ mit*

$$c_{jk} = \frac{(j,k)^2}{jk}, \quad j,k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Definiere die multiplikative zahlentheoretische Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gemäß $h := I * |\mu|$, wobei $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $I(n) = n$ die Identität ist. Dann ist die $n \times n$-Matrix $T(n) = (t_{jk}(n))_{j,k=1,\ldots,n}$ mit

$$t_{jk}(n) = jk \sum_{\substack{m=1\\ j|m\,,\,k|m}}^{n} \frac{\mu\left(\frac{m}{j}\right)\mu\left(\frac{m}{k}\right)}{\varphi(m)h(m)}, \quad j,k \in \{1,\ldots,n\},$$

zu $C(n)$ invers.

Beweis. Für $j,k \in \{1,...,n\}$ berechnen wir die Komponenten der Produktmatrix $C(n)\cdot T(n)$ wie folgt:

$$\sum_{s=1}^{n} c_{js}\cdot t_{sk}(n) = \frac{k}{j}\sum_{\substack{m=1\\ k|m}}^{n} \frac{\mu\left(\frac{m}{k}\right)}{\varphi(m)h(m)}\sum_{s|m}(j,s)^2\mu\left(\frac{m}{s}\right). \tag{2.6}$$

Der Ausdruck

$$d_{j,m} := \sum_{s|m}(j,s)^2\mu\left(\frac{m}{s}\right) = d_{(j,m),m}$$

ist bzgl. m multiplikativ, d.h. für alle $m_1,m_2\in\mathbb{N}$ mit $(m_1,m_2)=1$ und alle $j\in\mathbb{N}$ gilt

$$d_{j,m_1m_2} = d_{j,m_1}d_{j,m_2}\,,$$

da man der Reihe nach die Multiplikativität von $(j,.)$, $(j,.)^2$ sowie von $(j,.)^2*\mu$ bestätigt. Für Primzahlpotenzen $j=p^\alpha$, $m=p^\beta$ erhalten wir

$$d_{p^\alpha,\,p^\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \beta=0\,,\\ (p^\beta-p^{\beta-1})(p^\beta+p^{\beta-1}) & \text{für } 1\le\beta\le\alpha\,,\\ 0 & \text{für } \beta>\alpha\,.\end{cases}$$

Insgesamt folgt für alle $j,m\in\mathbb{N}$ unter Verwendung der Teilbarkeitsfunktion ϑ in (2.1)

$$d_{j,m} = \vartheta(m,j)\varphi(m)h(m)\,. \tag{2.7}$$

Einsetzen von (2.7) in (2.6) liefert unter Beachtung von Gleichung (2.2)

$$\sum_{s=1}^{n} c_{js}\cdot t_{sk}(n) = \frac{k}{j}\sum_{\substack{m=1\\ k|m,\,m|j}}^{n}\mu\left(\frac{m}{k}\right) = \frac{k}{j}\delta_{jk} = \delta_{jk}$$

mit den Kronecker-Delta Einträgen δ_{jk} der Einheitsmatrix. □

Bemerkung 2.4. Aus der Darstellung der $t_{jk}(n)$ erhält man auch für alle $j,k\in\mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} t_{jk}(n) = \frac{\pi^2}{6jk}\sum_{d\,|(j,k)} d^2\mu\left(\frac{j}{d}\right)\mu\left(\frac{k}{d}\right).$$

Der eben bewiesene Hilfssatz gestattet auch eine einfache Darstellung für die beste $L^2(0,1)$-Approximation einer $L^2(0,1)$- Funktion $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ mittels $\beta(t),\beta(2t),\cdots,\beta(nt)$:

Satz 2.4. *Für $n\in\mathbb{N}$ betrachten wir mit $\beta_j(t):=\beta(jt)$*

$$U_n := \{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j : \alpha_j\in\mathbb{C}\,, j=1,...,n\,\}$$

als n-dimensionalen Unterhilbertraum von $L^2(0,1)$ bzw. U mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle = \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}\,dt\,.$$

Es bezeichne $P_n : L^2(0,1) \to U_n$ die orthogonale Projektion auf U_n. Berechnet man zu gegebenem $f \in L^2(0,1)$ mit den Matrixelementen $t_{jk}(n)$ aus Lemma 2.1 die Koeffizienten

$$f_{j,n} := \int_0^1 f(t) \left(12 \sum_{k=1}^{n} t_{jk}(n)\beta_k(t) \right) dt \,, \quad j = 1, ..., n \,,$$

so ist $P_n f = \sum_{j=1}^{n} f_{j,n}\beta_j$. Für $f \in U$, siehe Definition 2.2(i), gilt $\lim_{n\to\infty} ||f - P_n f||_- = 0$.

Beweis. Für alle $v \in U_n$ folgt $\langle P_n f, v\rangle = \langle f, v\rangle$, da $f - P_n f$ zu U_n orthogonal ist. Mit der Unabhängigkeit der Funktionen β_j findet man eindeutig bestimmte Koeffizienten $x_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., n$, so dass

$$P_n f = \sum_{k=1}^{n} x_k \beta_k \,.$$

Bildet man hiervon unter Beachtung von Beispiel 2.4 für $j = 1, ..., n$ die Skalarprodukte

$$\langle P_n f, \beta_j\rangle \;=\; \langle f, \beta_j\rangle \;=\; \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n} \frac{(j,k)^2}{jk} x_k \,,$$

so ist dieses lineare Gleichungssystem nach Lemma 2.1 eindeutig für alle $k = 1, ..., n$ durch $x_k := f_{k,n}$ gelöst. Aus Satz 2.3 folgt zudem, dass die Vereinigung aller aufsteigender Unterräume U_n dicht in U liegt, also gilt im Falle $f \in U$: $\lim_{n\to\infty} ||f - P_n f||_- = 0$. □

Satz 2.5. *Wir bilden zu einer Funktion $f \in U$, siehe Definition 2.2(i), die Koeffizienten*

$$f_j := \int_0^1 f(t) \left(-2\pi \sum_{d\,|\,j} \frac{d}{j} \mu\left(\frac{j}{d}\right) \sin(2\pi d\, t) \right) dt \,, \quad j \in \mathbb{N} \,,$$

und definieren die Zahlenfolge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ gemäss $y_j := j f_j$. Ist dann $(|y_j|)_{j\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$, so gilt im Sinne der $L^2(0,1)$-Konvergenz mit $\beta_j(t) := \beta(jt)$:

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \beta_j \,.$$

Beweis. Definiere für alle $d \in \mathbb{N}$:

$$x_d := -2\pi d \int_0^1 \sin(2\pi d t) f(t)\, dt \,.$$

Aus der Definition der Koeffizienten f_j bzw. y_j erhalten wir direkt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$j f_j = y_j = \sum_{d|j} \mu\left(\frac{j}{d}\right) x_d \,.$$

Die Möbiussche Umkehrformel liefert

$$x_k = \sum_{d|k} y_d \,.$$

Aus der Annahme $(\sum_{d|k} |y_d|)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ und Satz 2.3 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.5. Für die Aussage des Satzes 2.5 stellt sich die interessante Frage, ob die folgende Abgeschlossenheitsbedingung für den Folgenraum $\mathcal{H}$ gilt:

$$(\sum_{d|n} y_d)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \quad \forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}\,. \tag{2.8}$$

Mit (2.8) könnte man in Satz 2.5 auf die Zusatzvoraussetzung $(|y_j|)_{j\in\mathbb{N}} * 1 \in \mathcal{H}$ verzichten. Zudem sollte geklärt werden, ob es sogar eine Konstante $c > 0$ gibt mit $||y * 1||_{\mathcal{H}} \leq c||y||_{\mathcal{H}}$ für alle $y \in \mathcal{H}$, siehe hierzu auch Satz 2.2.

3. Hilbertraum-Formulierung der Riemannschen Hypothese

In diesem Abschnitt formulieren und beweisen wir mit Verwendung des Hilbertschen Folgenraumes $\mathcal{H}$ eine Variante der Charakterisierung der Riemannschen Hypothese nach Nyman und Beurling, welche im Kern auf Báez-Duarte [1] zurückgeht, siehe dazu auch [4], [2]. Der Zugang von Báez-Duarte wurde in der eleganten Arbeit von Bagchi [3] weiter vereinfacht sowie beweistechnisch ausgebaut, worauf wir nun näher eingehen.

Wir definieren für $j, n \in \mathbb{N}$ die Spaltenvektoren

$$\underline{\gamma} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \underline{\gamma}_j := \begin{pmatrix} \frac{1}{j} - \lfloor\frac{1}{j}\rfloor \\ \frac{2}{j} - \lfloor\frac{2}{j}\rfloor \\ \frac{3}{j} - \lfloor\frac{3}{j}\rfloor \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

mit den Komponenten

$$\underline{\gamma}(n) = 1 \quad , \quad \underline{\gamma}_j(n) = \frac{n}{j} - \lfloor\frac{n}{j}\rfloor \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Offenbar gilt $\underline{\gamma}, \underline{\gamma}_j \in \mathcal{H}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, siehe Definition 2.1(ii).

Wir formulieren nun eine Hypothese, von der wir später zeigen werden, dass sie zur Riemannschen Hypothese äquivalent ist:

$\underline{\gamma}$-Hypothese
$\underline{\gamma}$ gehört zu dem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{H}$, in dem die Linearkombinationen der Vektoren $\underline{\gamma}_j$ dicht liegen, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} : \ \Big|\Big|\underline{\gamma} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{\gamma}_j\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,.$$

Bemerkung 3.1. Man beachte, dass $\underline{\gamma}_1$ der Nullvektor ist, der hier aus Gründen der Systematik mit aufgeführt wird.

Lemma 3.1. *Aus der $\underline{\gamma}$-Hypothese folgt bereits, dass die Linearkombinationen der Vektoren $\underline{\gamma}_j$ mit $j \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegen, d.h.*

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{H} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C} : \ \Big|\Big|\underline{x} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underline{\gamma}_j\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,.$$

Beweis. Es sei $\mathcal{M}$ der abgeschlossene Unterraum von $L^2(0,1)$ bestehend aus allen Funktionen, die auf jedem Teilintervall $\left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right)$ mit $j \in \mathbb{N}$ konstant sind. Dabei werden Funktionen identifiziert, welche sich nur bis auf Nullmengen voneinander unterscheiden. Es ist $\mathcal{M}$ mit dem Skalarprodukt von $L^2(0,1)$ ein eigenständiger Unterhilbertraum. Zu jedem $f \in \mathcal{M}$ ist über die isometrische Isomorphie $\Theta : L^2(0,1) \to L^2\big((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\big)$ mit $(\Theta f)(x) := f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 1$, vermöge der Einbettung aus Satz 2.1(ii) eine Zahlenfolge aus $\mathcal{H}$ definiert, so dass $\mathcal{M}$ und $\mathcal{H}$ zueinander isometrisch isomorph sind, wenn man für $\mathcal{H}$ die Norm $|\cdot|_{\mathcal{H}} = \sqrt{Q}$ wählt. Wir haben damit einen isometrischen Isomorphismus $\Theta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$, so dass insbesonders $\Theta_{\mathcal{M}}$ bijektiv ist mit

$$|\Theta_{\mathcal{M}} f|_{\mathcal{H}} = ||f||_{-} \, .$$

Zu jedem $x \in (0,1)$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \, , \tag{3.2}$$

nämlich $n := \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Ist m eine beliebige natürliche Zahl mit $x \leq \frac{1}{m}$, so folgt hieraus $m \leq n$ und

$$\frac{1}{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1} \leq \frac{m}{n+1} < mx \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \, . \tag{3.3}$$

Nach den Ungleichungen (3.2) und (3.3) ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ der lineare Operator $T_m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit

$$(T_m f)(x) = \begin{cases} m^{1/2} f(mx) \, , & x \in (0, \frac{1}{m}) \\ 0 \, , & x \in [\frac{1}{m}, 1) \end{cases}$$

wohldefiniert, und wegen

$$\int_0^1 \big|(T_m f)(x)\big|^2 \, dx = m \int_0^{1/m} \big|f(mx)\big|^2 \, dx = \int_0^1 \big|f(t)\big|^2 \, dt$$

auch normerhaltend:

$$||T_m f||_{-} = ||f||_{-} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \; \forall f \in \mathcal{M} \, . \tag{3.4}$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $g_j \in L^2(0,1)$ gegeben mit

$$g_j(x) := \frac{1}{j} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor - \lfloor \frac{1}{jx} \rfloor \, . \tag{3.5}$$

Es folgen für $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{jx} \in \left(\frac{n}{j}, \frac{n+1}{j} \right) \, , \quad \lfloor \frac{1}{jx} \rfloor = \lfloor \frac{n}{j} \rfloor \quad \text{sowie} \quad g_j(x) = \frac{n}{j} - \lfloor \frac{n}{j} \rfloor = \underline{\gamma}_j(n) \, .$$

Wir erhalten für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$g_j \in \mathcal{M} \, , \qquad \Theta_{\mathcal{M}} \, g_j = \underline{\gamma}_j \, . \tag{3.6}$$

Die charakteristische Funktion $\chi_{(0,1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Intervalles $(0,1)$,

$$\chi_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1 \, , & 0 < x < 1 \\ 0 \, , & \text{sonst} \, , \end{cases}$$

dürfen wir auch als Funktion aus $\mathcal{M}$ interpretieren, wobei gilt

$$\Theta_{\mathcal{M}} \, \chi_{(0,1)} = \underline{\gamma} \, . \tag{3.7}$$

Für $m, j \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$ gilt nach (3.5)

$$\begin{aligned} g_{jm}(x) - \frac{1}{j}\, g_m(x) &= \frac{1}{jm}\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - \lfloor \frac{1}{jmx} \rfloor - \frac{1}{j}\left(\frac{1}{m}\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - \lfloor \frac{1}{mx} \rfloor\right) \\ &= \frac{1}{j}\lfloor \frac{1}{mx} \rfloor - \lfloor \frac{1}{jmx} \rfloor , \end{aligned}$$

also

$$T_m g_j = m^{\frac{1}{2}}\Big(g_{jm} - \frac{1}{j} g_m\Big) . \tag{3.8}$$

Hierbei ist noch zu beachten, dass die Auswertung beider Gleichungsseiten in (3.8) an jeder Stelle x mit $\frac{1}{m} \leq x < 1$ den Wert Null liefert. Es bezeichne nun $\mathcal{K}$ den Abschluss der linearen Hülle aller Vektoren $g_j \in \mathcal{M}$ bzgl. der auf den Hilbertraum $\mathcal{M}$ eingeschränkten Norm $||\cdot||_{-}$ von $L^2(0,1)$. $\mathcal{K}$ ist Unterhilbertraum von $\mathcal{M}$ und folglich $\Theta_{\mathcal{M}}\mathcal{K}$ Unterhilbertraum von $\mathcal{H}$. Wir beachten nun (3.6) und (3.7). Es ist $\Theta_{\mathcal{M}}\mathcal{K}$ der Abschluss der linearen Hülle aller Vektoren $\underline{\gamma}_j = \Theta_{\mathcal{M}}\, g_j,\ j \in \mathbb{N}$, bzgl. der Norm $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$, da $\Theta_{\mathcal{M}}$ isometrischer Isomorphismus ist. Nach der Voraussetzung im zu beweisenden Lemma ist $\underline{\gamma} = \Theta_{\mathcal{M}}\, \chi_{(0,1)} \in \Theta_{\mathcal{M}}\mathcal{K}$, und folglich $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{K}$. Wir zeigen:

$$T_m\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \qquad \forall m \in \mathbb{N} . \tag{3.9}$$

Hierzu sei $f \in \mathcal{K}$ beliebig vorgegeben. Nach der Definition von $\mathcal{K}$ gibt es eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{K}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, so dass alle f_n Linearkombinationen der Funktionen g_j, $j \in \mathbb{N}$, sind und zudem $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - f_n||_{-} = 0$ gilt. Es ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ und folglich auch $T_m f \in \mathcal{M}$, $T_m f_n \in \mathcal{M}\,,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$. Nach Gleichung (3.8) sind auch die Funktionen $T_m f_n$ Linearkombinationen der $g_j,\ j \in \mathbb{N}$, und nach Gleichung (3.4) erhalten wir im Funktionenraum $\mathcal{M}$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} ||T_m f - T_m f_n||_{-} = \lim_{n\to\infty} ||T_m(f - f_n)||_{-} = \lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{-} = 0 ,$$

so dass auch $T_m f \in \mathcal{K}$ folgt und die Inklusion (3.9) bewiesen ist. Mit $\chi_{(0,1)} \in \mathcal{K}$ ist nun für alle $m \in \mathbb{N}$ auch

$$T_m\, \chi_{(0,1)} = m^{\frac{1}{2}}\, \chi_{(0,\frac{1}{m})} \in \mathcal{K} .$$

Hieraus folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\chi_{(0,\frac{1}{m})} - \chi_{(0,\frac{1}{m+1})} = \chi_{[\frac{1}{m+1},\frac{1}{m})} \in \mathcal{K} . \tag{3.10}$$

Die Linearkombinationen der Funktionen (3.10) liegen aber bereits dicht in $\mathcal{M}$, also folgen $\mathcal{K} = \mathcal{M}$ und $\Theta_{\mathcal{M}}\mathcal{K} = \mathcal{H}$, so dass $\mathcal{H}$ der Abschluss der linearen Hülle aller Vektoren $\underline{\gamma}_j$ $(j \in \mathbb{N})$ ist, und Lemma 3.1 folgt. □

Lemma 3.2. *Aus der $\underline{\gamma}$-Hypothese folgt die Riemannsche Hypothese.*

Beweis. Wir nehmen an, es gelte die $\underline{\gamma}$-Hypothese, aber nicht die Riemannsche Hypothese, und müssen hieraus für den Nachweis des Lemmas einen Widerspruch ableiten: Es gibt ein $\rho \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ und $\zeta(\rho) = 0$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 1$ folgt mit $g_j \in \mathcal{M}$

aus Gleichung (3.5):

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^{s-1} \cdot g_j(x)\,dx &= \int_0^\infty x^{s-1} \left(\frac{1}{j}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{1}{jx}\right\rfloor\right)\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{j}\lfloor t\rfloor - \left\lfloor\frac{t}{j}\right\rfloor\right)\frac{dt}{t^{s+1}} \\
&= \int_0^\infty \frac{\lfloor t\rfloor - t}{j\cdot t^{s+1}}\,dt - \int_0^\infty \left(\left\lfloor\frac{t}{j}\right\rfloor - \frac{t}{j}\right)\frac{dt}{t^{s+1}} \\
&= \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j^s}\right)\cdot\frac{\zeta(s)}{s}\,.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Andererseits ist aber auch

$$
\int_0^1 x^{s-1}\cdot\chi_{(0,1)}(x)\,dx = \frac{1}{s}\,,\quad \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}\,. \tag{3.12}
$$

Mit Hilfe des isometrischen Isomorphismus $\Theta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ und mit Hilfe der Gleichungen (3.6) und (3.7) im Beweis von Lemma 3.1 lässt sich die $\underline{\gamma}$-Hypothese in die äquivalente Aussage übersetzen, dass die charakteristische Funktion $\chi_{(0,1)}$ in der $L^2(0,1)$-Norm beliebig genau durch Linearkombinationen der Funktionen g_j, $j \in \mathbb{N}$, approximierbar ist. Mit der bijektiven Fourier-Mellin-Isometrie $\mathcal{F}_- : L^2(0,1) \to H^2\left(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\right)$ im Paley-Wiener-Theorem 4.2 und mit $G_j \in H^2(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2})$,

$$
G_j(s) := \frac{\zeta(s)}{s}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j^s}\right)\,,\quad j \in \mathbb{N}\,,
$$

ist dabei zum einen nach (3.11)

$$
\mathcal{F}_- g_j = G_j \quad \forall j \in \mathbb{N}\,,
$$

und zum anderen nach (3.12)

$$
\mathcal{F}_- \chi_{(0,1)} = h_*
$$

mit $h_*(s) := \frac{1}{s}$ für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Im ersten Falle wird neben Gleichung (3.11) noch analytische Fortsetzung nach $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ verwendet. Aus dem Paley-Wiener-Theorem und der $\underline{\gamma}$-Hypothese folgt endlich die Existenz einer Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei alle h_n Linearkombinationen der Funktionen G_j sind und zudem $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Norm von $H^2(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2})$ gegen h_* konvergiert. Es folgt dann aus $G_j(\rho) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ auch

$$
h_n(\rho) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,
$$

aber auch

$$
\lim_{n\to\infty} ||h_* - h_n||_{H^2} = 0\,.
$$

Wird nun $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, insbesonders so klein, dass $\frac{1}{2}+\varepsilon < \mathrm{Re}(\rho)$ gilt, so folgt aus dieser H^2-Konvergenz bereits die gleichmäßige Konvergenz der h_n gegen h_* in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$, und somit der Widerspruch

$$
\frac{1}{\rho} = h_*(\rho) = \lim_{n\to\infty} h_n(\rho) = 0\,.
$$

Die gleichmäßige Konvergenz erhält man hierbei aus dem allgemeinen Satz 4.4 im Anhang. □

Im folgenden beweisen wir die schwierigere Umkehrung des Lemmas 3.2. Hierzu verwenden wir analytische Hilfsmittel, welche im Anhang vorgestellt und zum größten Teil bewiesen werden.

Angenommen, es gelte die Riemannsche Hypothese, die wir im Folgenden mit RH abkürzen. Betrachte das sternförmige Gebiet

$$\Omega_* := \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2} \ \& \ s \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right] \right\}.$$

Dann ist $\zeta(s) \neq 0 \quad \forall s \in \Omega_*$, und folglich existiert eine eindeutige Logarithmusfunktion $\mathcal{L}_* : \Omega_* \to \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= e^{\mathcal{L}_*(s)} \qquad \forall s \in \Omega_* \,, \\ \mathcal{L}_*(s) &\in \mathbb{R} \qquad \forall s > 1 \,. \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ hat $\mathcal{L}_*(s)$ die folgende Darstellung mit $0 \leq \frac{\Lambda(n)}{\log n} \leq 1$ für alle $n \geq 2$:

$$\mathcal{L}_*(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-s} \,. \tag{3.13}$$

Satz 3.1. *Es gelte RH.*

(a) *Es seien $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$ und $\delta > 0$ gegeben. Dann gibt es eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $C > 0$, so dass*

$$\left|\mathcal{L}_*(\sigma + it)\right| \leq C \cdot \big(\log |t|\big)^{2-2\sigma+\delta}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \geq e^e$ und alle σ mit $\sigma_0 \leq \sigma < 1 + \frac{1}{\log\log t}$ gilt.

(b) *Für alle $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ gibt es eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $D > 0$, so dass*

$$\frac{1}{\left|\zeta(\sigma + it)\right|} \leq D \cdot \big(|t| + 1\big)^{\delta}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\sigma \geq \sigma_0$ gilt.

Bemerkung 3.2. An dieser Stelle haben wir zwei beweistechnische Anmerkungen:

(i) Da $\mathcal{L}_*$ holomorph und insbesonders stetig ist, genügt der Nachweis von (a) für genügend großes $|t| \geq t_0$ mit einem $t_0 > e^{(e^2)}$. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass ggf. C vergrößert werden muss.

(ii) Die Voraussetzung $\sigma_0 \leq 1$ ist eine wesentliche Einschränkung im Teil (a). Wegen (3.13) hat man dagegen für $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ die folgende gleichmäßige Abschätzung:

$$\left|\mathcal{L}_*(\sigma + it)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\log n} n^{-\sigma} \leq \log \zeta(\sigma_0) \,.$$

Beweis. Es sei oBdA $t > 0$ mit $t \geq t_0 > e^{(e^2)}$ gegeben. Wir wenden die Borel-Carathéodory-Ungleichung Satz 4.6 auf $\mathcal{L}_*$ und die beiden Kreislinien mit Mittelpunkt $2+it$ und den Radien $r := \frac{3}{2} - \eta$, $R := \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\eta$ an, wobei zunächst $0 < \eta < \frac{3}{2}$ sei: Da die ζ-Funktion für $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ höchstens polynomial wächst, gilt

$$\operatorname{Re} \mathcal{L}_*(w) = \log\left|\zeta(w)\right| < A \cdot \log t$$

für alle w auf der Kreislinie $|w - (2 + it)| = R$ mit einem $A > 0$ unabhängig von t und η.

Speziell für $z := \frac{1}{2}+\eta+it$ auf der kleinen Kreislinie $|z-(2+it)| = r$ gilt mit RH und Satz 4.6

$$\big|\mathcal{L}_*(z)\big| \le \frac{3-\frac{3}{2}\eta}{\frac{1}{2}\eta}\big|\mathcal{L}_*(2+it)\big| + \frac{3-2\eta}{\frac{1}{2}\eta}\cdot A\log t < A'\,\frac{\log(\mathrm{Im}(z))}{\mathrm{Re}(z)-\frac{1}{2}}\,, \tag{3.14}$$

was sogar für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > \frac{1}{2}$ und hinreichend großem $\mathrm{Im}(z)$ mit einer von z unabhängigen Konstanten $A' > 1$ gilt, da $|\mathcal{L}_*(z)|$ in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) \ge 2$ gleichmässig exponentiell schnell für $\mathrm{Re}(z) \to \infty$ abklingt. Wir fixieren nun η und definieren

$$\sigma_1 := \log\log t > 2\,, \qquad \eta := \frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\log\log t} < \frac{1}{2}\,. \tag{3.15}$$

Nun wenden wir den Hadamardschen Drei-Kreise-Satz 4.5 auf die Kreislinien K_1, K_2, K_3 mit Mittelpunkt $\sigma_1 + it$ und den Radien

$$r_1 = \sigma_1 - 1 - \eta\,, \quad r_2 = \sigma_1 - \sigma\,, \quad r_3 = \sigma_1 - \frac{1}{2} - \eta$$

an, wobei $0 < r_1 < r_3$ und

$$\sigma_1 - r_1 > 1\,, \quad \sigma_1 - r_3 > \frac{1}{2}$$

gilt und zudem σ so zu wählen ist, dass auch noch $r_1 < r_2 < r_3$ erfüllt ist:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} = \frac{1}{2} + \eta < \sigma < 1 + \eta = 1 + \frac{1}{\log\log t}\,.$$

Mit $M_j := \max\limits_{z\in K_j}\big|\mathcal{L}_*(z)\big|$ und $\alpha := \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)/\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right)$ folgt

$$M_2 \le M_1^{1-\alpha}M_3^{\alpha}\,. \tag{3.16}$$

Wir haben $0 < \sigma_1 - r_j < \frac{3}{2}$ für $j = 1, 2, 3$, während $\sigma_1 = \log\log t$ für $t \to \infty$ unbegrenzt anwächst. Nun folgt mit Hilfe der für $x \ge 0$ gültigen Abschätzung $\frac{x}{1+x} \le \log(1+x) \le x$:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{r_3}{r_1}\right) &= \log\left(1 + \frac{r_3-r_1}{r_1}\right) \ge \frac{\frac{r_3-r_1}{r_1}}{\frac{r_3}{r_1}} = \frac{r_3-r_1}{r_3}\,,\\
\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) &= \log\left(1 + \frac{r_2-r_1}{r_1}\right) \le \frac{r_2-r_1}{r_1}\,,\\
\alpha &\le \frac{r_2-r_1}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_3-r_1} = \frac{r_2-r_1}{r_3-r_1}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{2r_1}\right)}_{=r_3/r_1}\,.
\end{aligned}$$

Mit $\frac{r_2-r_1}{r_3-r_1} = 2(1-\sigma) + \frac{2}{\log\log t}$ folgt

$$\alpha \le 2\cdot(1-\sigma) + \frac{\kappa}{\log\log t} \tag{3.17}$$

für eine absolute Konstante $\kappa > 0$. Zudem gilt für eine von t unabhängige Konstante $A'' > A'$ wegen Ungleichung (3.14) und $r_3 < \log\log t$

$$M_3 < \frac{A'}{\eta}\log(t + \log\log t) \le \frac{A'}{\eta}\Big(\log t + \frac{\log\log t}{t}\Big) \le \frac{A''}{\eta}\log t\,, \tag{3.18}$$

und wegen $A'' > A' > 1$:

$$
\begin{aligned}
M_1 &\leq \max_{\substack{x \geq 1+\eta \\ y \in \mathbb{R}}} \Big| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{\log k} k^{-x-iy} \Big| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{\log k} \cdot \frac{1}{k^{1+\eta}} \\
&\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\eta}} \leq \int_1^{\infty} \frac{dw}{w^{1+\eta}} = \frac{1}{\eta} < \frac{A''}{\eta}\,.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Unter Beachtung von $(\log t)^{\frac{\kappa}{\log\log t}} = e^{\kappa}$ und mit $\eta = (\log\log t)^{-1}$ in (3.15) können wir endlich mit Hilfe der Ungleichungen (3.16), (3.17), (3.18) und (3.19) die folgende Abschätzung durchführen:

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{L}_*(\sigma+it)\big| &\leq M_2 \leq \Big(\frac{A''}{\eta}\Big)^{1-\alpha} \cdot \Big(\frac{A''}{\eta}\log t\Big)^{\alpha} = \frac{A''}{\eta} \cdot \underbrace{(\log t)}_{>1}{}^{\alpha} \\
&\leq \tilde{C} \cdot \log\log t \cdot (\log t)^{2-2\sigma}
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

mit einer absoluten Konstanten $\tilde{C} > 0$.
Beweis der Teilaussage (a): Wähle $t_0 > e^{(e^2)}$ so groß, dass zum einen

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t_0} < \sigma_0\,,
$$

und zum anderen

$$
\frac{\log\log\log t}{\log\log t} \leq \delta, \quad \log\log t \leq e^{\delta \log\log t} \tag{3.21}
$$

für alle $t \geq t_0$ wird. Letzteres ist möglich, da die linke Seite von (3.21) für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert. Für alle $t \geq t_0$ ist dann auch

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{\log\log t} < \sigma_0\,. \tag{3.22}
$$

Für jedes $t \geq t_0$ und jedes σ mit $\sigma_0 \leq \sigma < 1 + \frac{1}{\log\log t}$ gilt nach den Ungleichungen (3.20) bis (3.22):

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{L}_*(\sigma \pm it)\big| = \big|\mathcal{L}_*(\sigma+it)\big| &\leq \tilde{C} \cdot e^{\delta \log\log t} \cdot (\log t)^{2-2\sigma} \\
&= \tilde{C} \cdot (\log t)^{2-2\sigma+\delta}\,.
\end{aligned}
$$

Beweis der Teilaussage (b): Für $\sigma \geq 1+\frac{1}{\log\log t}$ und $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+it}} = \mathcal{O}(\log\log t)$.
Es sei daher oBdA $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma < 1 + \frac{1}{\log\log t}$. Nach (a) gibt es für $\delta' := \sigma_0 - \frac{1}{2}$ ein $C > 0$, so dass für alle $t \geq e^e$ gilt:

$$
\big|\mathcal{L}_*(\sigma \pm it)\big| \leq C(\log t)^{2-2\sigma+\delta'} \leq C \cdot (\log t)^{\frac{3}{2}-\sigma_0}\,.
$$

Es ist $\frac{3}{2} - \sigma_0 < 1$, und somit

$$
\Big|\log\big|\zeta(\sigma \pm it)\big|\Big| = \big|\operatorname{Re}\mathcal{L}_*(\sigma \pm it)\big| \leq \delta \cdot \log t \leq \log\big((t+1)^{\delta}\big)\,,
$$

wenn $t \geq t_1(\sigma_0, \delta) \geq e^e$ zu gegebenem σ_0, $\delta > 0$ genügend groß gewählt wird. Damit ist auch (b) gezeigt, und wir erhalten noch zusätzlich:

Lemma 3.3. *Es gelte RH. Dann gibt es für alle $\sigma_0 > \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $D' > 0$, so dass*

$$\big|\zeta(\sigma + it)\big| \leq D' \cdot |t|^{\delta}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t| \geq 1$ und alle $\sigma \geq \sigma_0$ gilt.

□

Bemerkung 3.3. Eine Einschränkung der Art $|t| \geq 1$ ist hier nötig, da die ζ-Funktion an der Stelle 1 einen Pol hat.

Satz 3.2. *Es gelte RH.*

(a) *Es gibt eine absolute Konstante $c > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| \geq 2$ und* $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ *sowie für $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt:*

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\right| \leq c \cdot |s|^{\varepsilon/2}$$

(b) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $d_\varepsilon > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ *und $|s| \geq 2$ gilt:*

$$|\zeta(s)| \leq d_\varepsilon \cdot |s|^{\varepsilon}\,.$$

Bemerkung 3.4. (b) ist eine scharfe Formulierung der Lindelöfschen Hypothese, die sich somit aus der Riemannschen Hypothese ergibt. Die Teilaussage (b) ist zudem eine einfache Folge aus der Teilaussage (a) und dem vorigen Lemma 3.3: Hierzu sei $0 < \varepsilon \leq 1$, was keine Einschränkung für (b) darstellt, und $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| \geq 2$ sowie $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ beliebig gegeben, oBdA sei noch $\big|\mathrm{Im}(s)\big| \geq 1$. Dann folgt aus Satz 3.2(a):

$$\big|\zeta(s)\big| \leq c \cdot \big|\zeta(s+\varepsilon)\big| \cdot |s|^{\varepsilon/2}\,,$$

und aus Lemma 3.3 mit $\sigma_0 := \frac{1}{2} + \varepsilon > \frac{1}{2}$, $\delta := \frac{\varepsilon}{2} > 0$ für eine Konstante D'_ε:

$$\big|\zeta(s)\big| \leq c \cdot D'_\varepsilon \cdot \big|\mathrm{Im}(s)\big|^{\varepsilon/2} \cdot |s|^{\varepsilon/2} < c \cdot D'_\varepsilon \cdot |s|^{\varepsilon}\,.$$

Es genügt also ein Beweis der Teilaussage (a):

Beweis. Betrachte die ganze Funktion

$$\xi(s) := \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) \tag{3.23}$$

mit der Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s) \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

und der Hadamardschen Produktzerlegung

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} \prod_{\substack{\rho:\zeta(\rho)=0\\ 0<\mathrm{Re}(\rho)<1\\ |\,\mathrm{Im}(\rho)|\leq T}} \Big(1 - \frac{s}{\rho}\Big) \qquad \forall s \in \mathbb{C}\,,$$

bei der die Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden. Lässt man im Produkt stets die Faktoren $(1-\frac{s}{\rho})$ und $(1-\frac{s}{1-\rho})$ zusammen, so wird das Produkt sogar unbedingt konvergent, und wir schreiben dann kurz

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\prod_{\rho}{}'\Big(1 - \frac{s}{\rho}\Big)$$

mit

$$\big|\xi(s)\big| = \frac{1}{2}\prod_{\rho}{}'\Big|1-\frac{s}{\rho}\Big| \qquad \forall s\in\mathbb{C} \tag{3.24}$$

(siehe die Lehrbücher von Edwards [8, Chapter 2] oder für eine allgemeinere Argumentation von Lorenz [17, Kapitel XII, § 3]). Gleichungen (3.23) und (3.24) gelten in ganz $\mathbb{C}$. Unter der Annahme von RH folgt aus (3.24):

$$\big|\xi(s+\varepsilon)\big| \geq \big|\xi(s)\big|\,, \quad \mathrm{Re}(s)\geq\frac{1}{2}, \quad \varepsilon>0\,, \tag{3.25}$$

denn mit $\rho=\frac{1}{2}+i\vartheta$, $\vartheta=\mathrm{Im}(\rho)$, $s=\sigma+it$, $\sigma\geq\frac{1}{2}$ und $t\in\mathbb{R}$ wird

$$\begin{aligned}\Big|1-\frac{s+\varepsilon}{\rho}\Big| &= \frac{\big|\frac{1}{2}+i\vartheta-\sigma-it-\varepsilon\big|}{|\rho|} = \frac{\sqrt{\big(\sigma-\frac{1}{2}+\varepsilon\big)^2+\big(\vartheta-t\big)^2}}{|\rho|}\\ &\geq \frac{\sqrt{\big(\sigma-\frac{1}{2}\big)^2+\big(\vartheta-t\big)^2}}{|\rho|} = \Big|1-\frac{s}{\rho}\Big|\,.\end{aligned}$$

Für alle $s\in\mathbb{C}$ mit $|s|\geq 2$ und $\mathrm{Re}(s)\geq\frac{1}{2}$ folgt somit aus (3.23) und (3.25):

$$\left|\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)}\right| \leq \pi^{-\frac{\varepsilon}{2}}\left|\frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)}\right|\cdot\left|\frac{\Gamma(\frac{s+\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\right| \leq c_1\left|\frac{\Gamma(\frac{s+\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\right| \tag{3.26}$$

für eine absolute Konstante $c_1>0$ und $0<\varepsilon\leq 1$. Für $0<\alpha<\pi$ definieren wir das Winkelfeld $K_\alpha := \{re^{i\varphi}\,|\,r>0\,,\ \varphi\in(-\alpha,\alpha)\}$. Dann gilt für alle $z\in K_\alpha$ die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(z)=\exp\left[\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} - \int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt\right]$$

mit der folgenden Abschätzung des Korrekturintegrals im Exponenten,

$$\Big|\int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt\Big| \leq \frac{\alpha}{8\sin\alpha}\cdot\frac{1}{|z|} \tag{3.27}$$

für alle $z\in K_\alpha$, (siehe Remmert [19, Kapitel 2, § 4.2]). Hierbei ist wie bisher log der Hauptzweig des Logarithmus. Speziell für $\alpha:=\frac{\pi}{2}$ ist $K_{\frac{\pi}{2}}$ die Halbebene $\mathrm{Re}(z)>0$, in der sicher $\frac{s+\varepsilon}{2}$ sowie $\frac{s}{2}$ liegen. Es ist nach (3.27):

$$\Big|\int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{\frac{s+\varepsilon}{2}+t}\,dt\Big| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{8|\frac{s+\varepsilon}{2}|} \leq \frac{\pi}{8|s|} \leq \frac{\pi}{16}\,,$$

und ebenso

$$\Big|\int_0^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{\frac{s}{2}+t}\,dt\Big| \leq \frac{\pi}{16}\,.$$

Schließlich beachten wir noch, dass für $\frac{\varepsilon}{|s|}<1$ und $\mathrm{Re}(s)\geq\frac{1}{2}$ gilt:

$$\log\Big(\frac{s+\varepsilon}{2}\Big) = \log\Big(\frac{s}{2}\Big) + \log\Big(1+\frac{\varepsilon}{s}\Big)\,.$$

Aus den letzten drei Beziehungen und der Stirlingschen Formel folgt mit zwei absoluten Konstanten $c_2, c_3 > 0$ unter Beachtung von $\left|\log(1+\frac{\varepsilon}{s})\right| \leq \frac{\varepsilon}{|s|}$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Gamma(\frac{s+\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\right| &\leq c_2 \cdot \left|\exp\left[\frac{s+\varepsilon-1}{2}\log\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) - \frac{s-1}{2}\log\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right| \\ &\leq c_3 \cdot \left|\exp\left[\frac{\varepsilon}{2}\log\left(\frac{s}{2}\right)\right]\right| = c_3 \cdot \left|\frac{s}{2}\right|^{\frac{\varepsilon}{2}} . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Die Teilaussage (a) des Satzes ergibt nun sofort aus (3.26) und (3.28). □

Der folgende Satz geht, wenn auch nicht in dieser konkreten Form, auf Littlewood zurück:

Satz 3.3. *Es gelte die Riemannsche Hypothese (RH), und es seien Zahlen σ_0, δ gegeben mit $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$ und $\delta > 0$. Dann gibt es eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $d > 0$, so dass für alle $x \geq 1$, alle $\sigma \geq \sigma_0$ sowie für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $s := \sigma + it$ gilt:*

$$\Big|\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n^s}\Big| \leq d \cdot \big(1+|t|\big)^{\delta} .$$

Beweis. Es sei oBdA $x = N + \frac{1}{2}$ mit $N \in \mathbb{N}$. In Satz 4.7 setzen wir $c_n := \mu(n)$, $\sigma_* := 4$, $b := 2$, $\phi(y) \equiv 1$ für $y \geq 1$, und erhalten dort für $\alpha := 1$ die Existenz einer absoluten Konstanten $\beta > 0$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^{\kappa}} = \frac{\zeta(\kappa)}{\zeta(2\kappa)} \leq \frac{\beta}{\kappa-1} \tag{3.29}$$

für alle κ mit $1 < \kappa \leq 4$. Für jedes $T > 0$ folgt dann aus Satz 4.7 mit einer absoluten, von x, s und T unabhängigen Konstanten $d_1 > 0$:

$$\Big|\sum_{n<x}\frac{\mu(n)}{n^s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\frac{1}{\zeta(s+w)}\cdot\frac{x^w}{w}\,dw\Big| \leq d_1 \cdot \frac{x^2}{T}, \quad \frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) \leq 2. \tag{3.30}$$

Für $s = \sigma + it$ sei nun $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ bei gegebenem $\sigma_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$, $t \in \mathbb{R}$, wobei die Bedingung $\sigma \leq 2$ keine wesentliche Einschränkung für den Beweis des Satzes bedeutet. Für jedes $\eta < 0$ mit $\sigma + \eta > \frac{1}{2}$ folgt nun aus RH und dem Residuensatz, angewendet auf das Rechteck zu dem einfach geschlossenen Kantenweg $[\eta - iT, 2-iT] \oplus [2-iT, 2+iT] \oplus [2+iT, \eta+iT] \oplus [\eta+iT, \eta-iT]$ und den Integranden $\frac{1}{\zeta(s+w)} \cdot \frac{x^w}{w}$ (die Integration bzgl. w mit $\mathrm{Re}(s+w) > \frac{1}{2}$ liefert im Rechteck nur bei $w = 0$ einen Pol, dieser ist einfach und hat das Residuum $\frac{1}{\zeta(s)}$):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\frac{x^w}{\zeta(s+w)}\cdot\frac{dw}{w} = \frac{1}{\zeta(s)} + \frac{I_1 + I_2 + I_3}{2\pi i} \tag{3.31}$$

mit den drei Integralen

$$I_1 := \int_{\eta-iT}^{\eta+iT}\frac{x^w}{\zeta(s+w)}\cdot\frac{dw}{w}, \quad I_2 := \int_{\eta+iT}^{2+iT}\frac{x^w}{\zeta(s+w)}\cdot\frac{dw}{w}, \quad I_3 := \int_{2-iT}^{\eta-iT}\frac{x^w}{\zeta(s+w)}\cdot\frac{dw}{w} . \tag{3.32}$$

Wir setzen nun

$$\eta := -\frac{1}{2}\Big(\sigma_0 - \frac{1}{2}\Big)\,, \quad T := x^3\,, \tag{3.33}$$

und wählen eine beliebige Zahl $\delta_0 > 0$ mit

$$\delta_0 < \min\left(\delta\,,\, \frac{1}{6}\Big(\sigma_0 - \frac{1}{2}\Big)\right). \tag{3.34}$$

Dann gibt es eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $d_2 > 0$ mit

$$\Big|\frac{1}{\zeta(s+w)}\Big| \le d_2 \cdot \Big(1 + \big|\operatorname{Im}(s+w)\big|\Big)^{\delta_0}$$

für alle komplexen Zahlen s, w mit $\operatorname{Re}(s+w) \ge \frac{\sigma_0+\frac{1}{2}}{2} > \frac{1}{2}$, siehe Satz 3.1(b). In den Integranden von I_1, I_2, I_3 sind die beiden Bedingungen

$$\operatorname{Re}(s+w) \ge \sigma + \eta \ge \frac{\sigma_0 + \frac{1}{2}}{2}\,,$$
$$\big|\operatorname{Im}(s+w)\big| \le |t| + x^3$$

erfüllt, dabei gilt $|\frac{x^w}{w}| \le \frac{1}{x}$ für I_2, I_3 mit

$$\begin{aligned} |I_2| + |I_3| &\le 2\,d_2\left(2 + \frac{1}{2}\Big(\sigma_0 - \frac{1}{2}\Big)\right)\frac{\big(1+|t|+x^3\big)^{\delta_0}}{x} \\ &\le \frac{9}{2}\,d_2 \cdot \frac{\big(1+|t|\big)^{\delta_0} + x^{3\delta_0}}{x}\,, \end{aligned} \tag{3.35}$$

da aus $\sigma_0 \le 1$ insbesonders $\delta_0 < \frac{1}{12} < 1$ folgt, und in diesem Fall für alle $a, b > 0$ die Ungleichung $(a+b)^{\delta_0} \le a^{\delta_0} + b^{\delta_0}$ gilt.

Für I_1 erhalten wir mit der Parametrisierung $w = \gamma(\vartheta) := \eta + i\vartheta$, $-x^3 \le \vartheta \le x^3$:

$$I_1 = i x^\eta \int_{-x^3}^{x^3} \frac{x^{i\vartheta}}{\zeta\big(\sigma + \eta + i(t+\vartheta)\big)} \cdot \frac{d\vartheta}{\eta + i\vartheta}$$

mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_1| &\le d_2 \cdot \Big((1+|t|)^{\delta_0} + x^{3\delta_0}\Big) \cdot x^\eta \cdot \int_{-x^3}^{x^3} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}} \\ &\le d_3 \cdot \Big((1+|t|)^{\delta_0} + x^{3\delta_0}\Big) \cdot x^{-\frac{1}{2}\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)} \cdot \log x \end{aligned} \tag{3.36}$$

mit einer nur von σ_0 und δ abhängigen Konstanten $d_3 > 0$. Für das Residuum $\frac{1}{\zeta(s)}$ in Gleichung (3.31) gibt es nach Satz 3.1(b) noch eine nur von σ_0 und δ abhängige Konstante $d_4 > 0$ mit

$$\Big|\frac{1}{\zeta(s)}\Big| \le d_4 \cdot \big(1 + |t|\big)^{\delta}\,, \tag{3.37}$$

wobei wir an $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq \sigma_0$, $t \in \mathbb{R}$, erinnern, d.h. (3.37) gilt gleichmäßig in σ und t. Aus (3.30), (3.31), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36) und (3.37) folgt

$$\sum_{n<x} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma+it}} = \mathcal{O}_{\sigma_0,\delta}\Big(\big(1+|t|\big)^{\delta}\Big)$$

gleichmäßig in $x \geq 1$, $\sigma \geq \sigma_0$ und $t \in \mathbb{R}$, womit Satz 3.3 gezeigt ist. □

Bemerkung 3.5. Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ für $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ gegen $\frac{1}{\zeta(s)}$ konvergiert, folgt aus dem Satz 3.3 mit RH und dem Satz 4.8 von Vitali die kompakte (und insbesonders die punktweise) Konvergenz dieser Reihe gegen $\frac{1}{\zeta(s)}$ bereits für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Da die drei Integrale in Gleichung (3.32) im Beweis von Satz 3.3 für $x \to \infty$ gegen 0 konvergieren, haben wir die Konvergenz der oben stehenden Reihe unter Annahme von RH sogar ohne Verwendung des Satzes von Vitali für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ gezeigt.

Wir erinnern nun wieder an den Hilbertraum $\mathcal{H}$ in Definiton 2.1(ii) und die speziellen periodischen Folgen $\underline{\gamma}$, $\underline{\gamma_j} \in \mathcal{H}$ aus (3.1), dort als unendliche Spaltenvektoren geschrieben.

Satz 3.4. *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(i) *RH,*
(ii) $\underline{\gamma}$ *gehört zum $\mathcal{H}$-Abschluss der linearen Hülle der* $\underline{\gamma}_j$, $j \in \mathbb{N}$,
(iii) *Die lineare Hülle der* $\underline{\gamma}_j$, $j \in \mathbb{N}$, *liegt dicht in* $\mathcal{H}$.

Bemerkung 3.6. Die lineare Hülle der Teilmenge X eines Vektorraumes V ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen mit Vektoren aus X in V, die wir kurz mit $LH(X)$ bezeichnen. Die Kombinationskoeffizienten werden i.a. als komplex vorausgesetzt und V somit als ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beweis. Es bleibt nur noch „(i) ⇒ (ii)“ zu zeigen, da die Äquivalenz von (ii) und (iii) sofort aus Lemma 3.1 folgt und die Implikation „(ii) ⇒ (i)“ schon in Lemma 3.2 gezeigt worden ist. Die Behauptung (ii) haben wir am Beginn von Abschnitt 3 „$\underline{\gamma}$-Hypothese“ genannt. Es gelte RH, und wir müssen nur noch die $\underline{\gamma}$-Hypothese aus RH herleiten: Mit dem Unterraum $\mathcal{M}$ von $\big(L^2(0,1), ||\cdot||_-\big)$ aller Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{C}$, die für alle $j \in \mathbb{N}$ auf dem Teilintervall $\big(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\big)$ konstant sind, und mit dem isometrischen Isomorphismus $\Theta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \big(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}}\big)$ im Beweis von Lemma 3.1 haben wir bereits die $\underline{\gamma}$-Hypothese in die äquivalente Behauptung übersetzt, dass die linearen Kombinationen der $g_j \in L^2(0,1), j \in \mathbb{N}$, die charakteristische Funktion $\chi_{(0,1)}$ beliebig genau in der Norm $||\cdot||_-$ von $L^2(0,1)$ approximieren, siehe (3.5), (3.6) und (3.7) im Beweis von Lemma 3.1. Mit dem Paley-Wiener-Theorem 4.2 und den Gleichungen (3.11), (3.12) im Beweis von Lemma 3.2 wiederum können wir die letzte Behauptung in die folgende zur $\underline{\gamma}$-Hypothese äquivalente Form übersetzen: Die Linearkombinationen der $G_j \in H^2(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2})$ mit

$$G_j(s) := \frac{\zeta(s)}{s}\Big(\frac{1}{j} - \frac{1}{j^s}\Big), \quad j \in \mathbb{N}, \ \mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}, \tag{3.38}$$

approximieren in der Norm $||\cdot||_{H^2}$ beliebig genau die Funktion $h_* \in H^2(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2})$ mit

$$h_*(s) := \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}.$$

Diese Behauptung leiten wir nun aus RH ab: Gegeben sei ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Definiere für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Funktion $H_{N,\varepsilon} \in LH\big(\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}\big) \subset H^2(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2})$ mit

$$H_{N,\varepsilon}(s) := -\sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n^{\varepsilon}}\, G_n(s)\,, \quad \operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}\,. \tag{3.39}$$

Obwohl die H^2-Funktionen in (3.38) bis (3.39) eigentlich nur für $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ erklärt sind, lassen sie sich analytisch nach $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ fortsetzen (mit denselben Bezeichnungsweisen), wovon wir Gebrauch machen. Beachten wir nun für $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$

$$H_{N,\varepsilon}(s) = \frac{\zeta(s)}{s}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n^{s+\varepsilon}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n^{1+\varepsilon}}\right)\,,$$

so folgt nach Bemerkung 3.5 zu Satz 3.3:

$$\lim_{N\to\infty} H_{N,\varepsilon}(s) = H_{\varepsilon}(s)\,, \quad \operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}\,, \tag{3.40}$$

wobei die Konvergenz sogar kompakt ist. Dabei definieren wir für $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$:

$$H_{\varepsilon}(s) := \frac{\zeta(s)}{s}\left(\frac{1}{\zeta(s+\varepsilon)} - \frac{1}{\zeta(1+\varepsilon)}\right)\,.$$

Nach Satz 3.2(b) (Lindelöfsche Hypothese) gibt es eine Konstante $c_1 > 0$ mit

$$\big|\zeta(s)\big| \leq c_1 \cdot |s|^{1/8} \tag{3.41}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ und $|s| \geq 2$, und nach Littlewoods Satz 3.3 eine nur von ε abhängige Konstante $c_2 > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$ gilt:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n^{s+\varepsilon}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{n^{1+\varepsilon}}\Big| \leq c_2 \cdot \Big(1 + \big|\operatorname{Im}(s)\big|\Big)^{1/8}\,. \tag{3.42}$$

Indem man die Konstante c_1 in (3.41) ggf. vergrößert, sieht man, dass (3.41) auch auf der gesamten kritischen Geraden $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ gültig ist, dort ohne die Einschränkung $|s| \geq 2$. Dann folgt aus (3.41) und (3.42) für $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ unabhängig von $n \in \mathbb{N}$

$$\big|H_{n,\varepsilon}(s)\big|^2 \leq \frac{c_3}{|s|^{3/2}} \tag{3.43}$$

mit einer höchstens von ε abhängigen Konstanten $c_3 > 0$. Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen, für die $|f_n|^2 \leq g$ mit einer Lebesgue-integrierbaren Majorante g für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte und der punktweise Limes $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Dann ist nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz neben den f_n auch f eine L^2-Funktion mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(t)\big|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(t)\big|^2\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt < \infty\,.$$

Hieraus folgt mit

$$|f_n - f|^2 \leq |f_n|^2 + 2 \cdot |f_n| \cdot |f| + |f|^2 \leq 4\, g$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ durch abermalige Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes auch die Konvergenz der f_n gegen f in der L^2-Norm:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f_n(t) - f(t)\right|^2 dt \, = 0 \, .$$

Also konvergiert auch die Funktionenfolge $(H_{n,\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ auf der kritischen Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ in der L^2-Norm gegen H_ε, siehe (3.40) und (3.43). Jedes $F \in H^2(\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2})$ hat eine (fast überall eindeutig bestimmte) L^2-Randfunktion $F_{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} + i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\lim_{\sigma\downarrow\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|F(\sigma+it) - F_{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^2 dt = 0$$

und

$$||F||_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma>\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|F(\sigma+it)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|F_{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^2 dt \, ,$$

siehe die Bemerkung 4.2 im Anhang. Es folgt

$$\lim_{N\to\infty} ||H_{N,\varepsilon} - H_\varepsilon||_{H^2} = 0 \, . \tag{3.44}$$

Da $H_{N,\varepsilon} \in LH\big(\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}\big)$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ist, liegt H_ε im H^2-Abschluss von $LH\big(\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}\big)$. Die ζ-Funktion hat bei $s = 1$ einen (einfachen) Pol, und folglich gilt für $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{1}{2}$:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ 0<\varepsilon<\frac{1}{4}}} H_\varepsilon(s) = h_*(s) = \frac{1}{s} \, .$$

Um die Konvergenz von H_ε gegen h_* nicht nur punktweise, sondern auch in der H^2-Norm zu zeigen, müssen wir wieder auf der kritischen Geraden eine von ε unabhängige Lebesguesche Majorante für $|H_\varepsilon|^2$ finden. Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ und $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ gilt aber nach Satz 3.2(a) und (b) mit einer absoluten Konstanten $c_4 > 0$:

$$\big|H_\varepsilon(s)\big| \leq c_4 \frac{|s|^{1/8}}{|s|} = \frac{c_4}{|s|^{7/8}} \, . \tag{3.45}$$

Die rechte Seite von (3.45) ist über die kritische Gerade quadratisch integrierbar, und nach demselben allgemeinen Argument wie zuvor folgt mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz sogar

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ 0<\varepsilon<\frac{1}{4}}} ||H_\varepsilon - h_*||_{H^2} = 0 \, .$$

Mit den H_ε liegt also auch h_* im H^2-Abschluss von $LH\big(\{G_j \mid j \in \mathbb{N}\}\big)$, was zu zeigen war. $\square$

Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ führen wir neben den (nicht normierten) Vektoren

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} , \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} , \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} , \dots ,$$

die die Matrix $E = (\delta_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}$ bilden, noch folgendes System von Vektoren ein:

$$\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1\\\vdots \end{pmatrix}, \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\2\\1\\2\\\vdots \end{pmatrix}, \underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\1\\2\\3\\\vdots \end{pmatrix}, \ldots .$$

Die Spalten bilden eine Matrix

$$\begin{aligned} D &= (d_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}}\,, \\ d_{jk} &= j - k\lfloor\frac{j}{k}\rfloor + k\,\vartheta(k,j) = \underline{d}_k(j) \end{aligned} \tag{3.46}$$

mit der Teilbarkeitsfunktion ϑ in Gleichung (2.1). In (3.46) ist $j \in \mathbb{N}$ der Zeilenindex und $k \in \mathbb{N}$ der Spaltenindex. Schließlich können wir mit Hilfe der Spaltenvektoren $\underline{a}_k$ mit $\underline{a}_k(j) := \vartheta(k,j)$ bzw. $\underline{\gamma}_k$ in (3.1), $k \in \mathbb{N}$, die Vektoren $\underline{d}_k$ noch folgendermaßen schreiben:

$$\underline{d}_k = k\cdot(\underline{\gamma}_k + \underline{a}_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Mit $LH(D)$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Spaltenvektoren $\underline{d}_k$ in $\mathcal{H}$, also

$$LH(D) := LH\big(\{\underline{d}_k \mid k \in \mathbb{N}\}\big)\,.$$

Folgerung 3.1. *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(i) *RH,*
(ii) *$\underline{e}_1$ gehört zum $\mathcal{H}$-Abschluss von $LH(D)$,*
(iii) *$LH(D)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$.*

Beweis. Wir definieren den Shift-Operator $Sh : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit

$$Sh\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\\vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\x_1\\x_2\\\vdots \end{pmatrix}.$$

Sh ist linear, stetig und injektiv mit

$$\frac{1}{2}||\underline{x}||_{\mathcal{H}} \le \big|\big|Sh(\underline{x})\big|\big|_{\mathcal{H}} \le ||\underline{x}||_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.47}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze $\tilde{\underline{d}}_k := \underline{d}_k - \underline{d}_1$, also

$$\tilde{\underline{d}}_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{d}}_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0\\1\\\vdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{d}}_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\0\\1\\2\\\vdots \end{pmatrix}, \ \ldots$$

sowie für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\underline{d}}_k = k \cdot Sh(\underline{\gamma}_k)\,, \qquad \underline{d}_1 - \underline{e}_1 = Sh(\underline{\gamma})\,. \tag{3.48}$$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Es gelte RH. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 3.4 Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\Big|\Big|\underline{\gamma} - \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\gamma}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,.$$

Betrachte den Vektor

$$\underline{r} = \underbrace{\underline{d}_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k} \tilde{\underline{d}}_k}_{\in LH(D)} - \underline{e}_1\,. \tag{3.49}$$

Es gilt nach den Gleichungen (3.48):

$$\underline{r} = Sh\Big(\underline{\gamma} - \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{\gamma}_k\Big)$$

mit $||r||_{\mathcal{H}} \le \Big|\Big|\underline{\gamma} - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \underline{\gamma}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$. Da $\tilde{\underline{d}}_k = \underline{d}_k - \underline{d}_1 \in LH(D)$ gilt, lässt sich nach (3.49) der Vektor $\underline{e}_1$ beliebig genau mit Vektoren aus $LH(D)$ approximieren.
„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Nun gelte (ii), und $\varepsilon > 0$ sei beliebig gegeben. Dann existieren Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\Big|\Big|\underline{e}_1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{d}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,. \tag{3.50}$$

Speziell für die erste Komponente folgt aus der Abschätzung (3.50):

$$\Big|1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big| < \varepsilon\,.$$

Es gilt nach den Gleichungen (3.48):

$$Sh\Big(\underline{\gamma} + \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k \underline{\gamma}_k\Big) = \Big[1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big]\underline{d}_1 - \Big[\underline{e}_1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{d}_k\Big]\,. \tag{3.51}$$

Mit Hilfe von (3.47) erhalten wir aus (3.51):

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\underline{\gamma} + \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k \underline{\gamma}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} &\le 2 \cdot \Big|\Big|Sh\Big(\underline{\gamma} + \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k \underline{\gamma}_k\Big)\Big|\Big|_{\mathcal{H}} \le 2\varepsilon||\underline{d}_1||_{\mathcal{H}} + 2\varepsilon \\ &= 2 \cdot \big(||\underline{d}_1||_{\mathcal{H}} + 1\big) \cdot \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die $\underline{\gamma}$-Hypothese, d.h. RH. Wir haben die Äquivalenz von (i) und (ii) gezeigt. Da die Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (ii)“ trivial ist, genügt es, mit Hilfe der Hypothesen (i) und (ii), die wir nun annehmen, (iii) zu folgern: Es seien

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach (ii) gibt es Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\Big|\Big|\underline{e}_1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{d}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,,$$

und mit $\underline{x} - x_1\underline{e}_1 = Sh(\underline{y})$ für

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

nach Satz 3.4 Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{C}$, so dass

$$\Big|\Big|\underline{y} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \underline{\gamma}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\,.$$

Schließlich definieren wir $\underline{z} \in LH(D)$ mit

$$\underline{z} := \underline{z}_1 + \underline{z}_2\,,$$

wobei

$$\underline{z}_1 := x_1 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{d}_k\,,$$

$$\underline{z}_2 := \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{k} \underline{\tilde{d}}_k = Sh\Big(\sum_{k=1}^{m} \mu_k \underline{\gamma}_k\Big)\,.$$

Es folgt dann mit $\underline{x} = x_1\,\underline{e}_1 + Sh(\underline{y})$:

$$\begin{aligned} \big|\big|\underline{x} - \underline{z}\big|\big|_{\mathcal{H}} &= \big|\big|x_1\,\underline{e}_1 - \underline{z}_1 + Sh(\underline{y}) - \underline{z}_2\big|\big|_{\mathcal{H}} \le \big|\big|x_1\underline{e}_1 - \underline{z}_1\big|\big|_{\mathcal{H}} + \big|\big|Sh(\underline{y}) - \underline{z}_2\big|\big|_{\mathcal{H}} \\ &\le \varepsilon \cdot |x_1| + \Big|\Big|Sh\Big(\underline{y} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \underline{\gamma}_k\Big)\Big|\Big|_{\mathcal{H}} \le \varepsilon \cdot |x_1| + \Big|\Big|\underline{y} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \underline{\gamma}_k\Big|\Big|_{\mathcal{H}} \\ &\le \big(1 + |x_1|\big) \cdot \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, liegt $\underline{x}$ im $\mathcal{H}$-Abschluss von $LH(D)$. Es war $\underline{x} \in \mathcal{H}$ beliebig, womit der Satz gezeigt ist. □

Bemerkung 3.7. Es bezeichne $\mathcal{H}_D$ den $\mathcal{H}$-Abschluss von $LH(D)$. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine beliebige zahlentheoretische Funktion aus $\mathcal{H}$, so ist durch $(C_j f)(n) = f\left(\lfloor \frac{n+j-1}{j} \rfloor\right)$ ein stetiger und injektiver Operator $C_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiert, der die Komponenten von f der Reihe nach j-fach kopiert. Dann folgt $C_j\underline{d}_k = \frac{1}{j}(\underline{d}_{jk} - \underline{d}_j) + \underline{d}_1 \in LH(D)$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$, so dass C_j für jedes $j \in \mathbb{N}$ den Teilraum $\mathcal{H}_D$ wieder in $\mathcal{H}_D$ abbildet. Diese Invarianz des Raumes $\mathcal{H}_D$ entspricht genau der Invarianzbeziehung (3.9) des Raumes $\mathcal{K}$ im Beweis von Lemma 3.1.

4. Anhang: Funktionentheoretische Grundlagen

4.1. Hardy-Hilberträume in einer Halbebene.

Aus dem Lehrbuch von Rudin [20, Chapter 19] entnehmen wir:

Satz 4.1. Paley-Wiener Theorem, Version 1

Es sei $f = f(x+iy)$ in der oberen Halbebene $\mathbb{H}^+ := \{x+iy \,|\, x \in \mathbb{R} \;\&\; y > 0\}$ holomorph mit $f \in H^2(\mathbb{H}^+)$ (Hardy-Raum), d.h.

$$C := \frac{1}{2\pi} \sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx < \infty \,. \tag{4.1}$$

Dann existiert ein $\tilde{f} \in L^2(0,\infty)$ mit

$$f(z) = \int_0^\infty \tilde{f}(t) e^{itz} \, dt \,, \quad z \in \mathbb{H}^+ \tag{4.2}$$

$$\textit{und} \qquad C = \int_0^\infty |\tilde{f}(t)|^2 \, dt \,.$$

$\tilde{f}$ ist (fast überall) eindeutig bestimmt, und definiert man umgekehrt zu gegebenem $\tilde{f} \in L^2(0,\infty)$ die Funktion $f(z)$ durch (4.2), so ist f wohldefiniert mit $f \in H^2(\mathbb{H}^+)$.

Bemerkung 4.1. Die Beziehung (4.2) liefert somit einen isometrischen Isomorphismus zwischen den Räumen $L^2(0,\infty)$ und $H^2(\mathbb{H}^+)$, wobei $||f||_{H^2(\mathbb{H}^+)} := \sqrt{C}$ mit der Konstanten C in (4.1) die Norm der Funktion $f \in H^2(\mathbb{H}^+)$ ist. Eine weitere Variante dieses Theorems ist:

Satz 4.2. Paley-Wiener Theorem, Version 2

Der Hardy-Raum $H^2\left(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\right)$ besteht aus allen holomorphen Funktionen h in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ mit der Norm

$$||h||_{H^2} := \left(\frac{1}{2\pi} \sup_{\sigma > \frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\sigma + it)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \,.$$

Dann ist die Fourier-Mellin-Transformierte $\mathcal{F}_- : L^2(0,1) \to H^2\left(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\right)$ mit

$$\mathcal{F}_-(f)(s) := \int_0^1 x^{s-1} f(x) \, dx$$

ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus zwischen $L^2(0,1)$ und $H^2\left(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\right)$ mit der folgenden Norm des Raumes $L^2(0,1)$:

$$||f||_- = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left[\int_0^1 |x^{s-1} f(x)|\, dx\right]^2 \leq \int_0^1 x^{2\operatorname{Re}(s)-2}\, dx \cdot \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$$

endlich für $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Definiere zu $f \in L^2(0,1)$ die $L^2(0,\infty)$-Funktion $\tilde{f}$ mit

$$\tilde{f}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot f\left(e^{-t}\right) \qquad t > 0\,, \tag{4.3}$$

und zu $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ die Zahl $z = i(s - \frac{1}{2}) \in \mathbb{H}^+$. Durch (4.3) ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen den Funktionen $f \in L^2(0,1)$ und den $L^2(0,\infty)$-Funktionen $\tilde{f}$ gegeben (Substitution $x = e^{-t}$), und wir erhalten

$$\int_0^\infty \tilde{f}(t) e^{itz}\, dt = \int_0^1 x^{+\frac{1}{2}} f(x) x^{-iz} \frac{dx}{x} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}-iz} f(x)\, dx = \int_0^1 x^{s-1} f(x)\, dx\,.$$

Aus der ersten Version des Paley-Wiener Theorems folgt die Behauptung. □

Satz 4.3. Paley-Wiener Theorem, Version 3
Die (rechtsseitige) Fourier-Mellin-Transformierte $\mathcal{F}_+ : L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right) \to H^2(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2})$ *mit* $\mathcal{F}_+(g)(s) := \int_1^\infty x^{-s-1} g(x)\, dx$ *ist ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus zwischen* $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$ *und* $H^2(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2})$ *mit der folgenden Norm des Raumes* $L^2\left((1,\infty); \frac{dx}{x^2}\right)$*:*

$$||g||_+ = \left(\int_1^\infty \frac{|g(x)|^2}{x^2}\, dx\right)^{1/2}.$$

Beweis. Setze $f(x) := g(\frac{1}{x})$ für $0 < x < 1$ und verwende Satz 4.2. □

Satz 4.4.

(a) *Es sei* $F \in H^2(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2})$*. Dann gilt*

$$|F(s)| \leq \frac{||F||_{H^2}}{\sqrt{2\operatorname{Re}(s) - 1}} \quad \textit{für } \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\,.$$

(b) *Die Funktionenfolge* $h_n \in H^2(\operatorname{Re} s > \frac{1}{2})$ *konvergiere bzgl. der* H^2*-Norm gegen* h*. Dann konvergiert* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *in der abgeschlossenen Halbebene* $\operatorname{Re}(s) \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ *auch gleichmäßig gegen* h*.*

Beweis. Da (b) eine unmittelbare Folge der allgemeinen Abschätzung aus (a) ist, muss nur noch (a) gezeigt werden: Nach dem Paley-Wiener-Theorem 4.2 gibt es ein $f_1 \in L^2(0,1)$ mit

$$F(s) = \int_0^1 x^{s-1} \cdot f_1(x)\, dx\,, \qquad \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}\,, \tag{4.4}$$

und

$$||F||_{H^2} = ||f_1||_-\,. \tag{4.5}$$

Definiere $f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ gemäß

$$f_2(t) := e^{-t/2} \cdot f_1\big(e^{-t}\big)\,, \qquad t > 0\,. \tag{4.6}$$

Dann folgt mittels der Substitution $x = e^{-t}$ einerseits

$$\int\limits_0^\infty \big|f_2(t)\big|^2\,dt = \int\limits_0^1 \big|f_1(x)\big|^2\,dx = ||f_1||_-^2\,, \tag{4.7}$$

und andererseits für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ aus Gleichung (4.4):

$$F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-t(s-1)} \cdot f_1\big(e^{-t}\big)e^{-t}\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-ts} f_1\big(e^{-t}\big)\,dt = \int\limits_0^\infty f_2(t) \cdot \overline{e^{-t(\overline{s}-1/2)}}\,dt\,. \tag{4.8}$$

Mit der Parsevalschen Formel für $L^2(\mathbb{R})$-Funktionen, die für nicht positives Argument verschwinden, folgt aus (4.8) für $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\hat{f}_2(\xi)}{s - i\xi - \frac{1}{2}}\,d\xi\,, \tag{4.9}$$

wobei $\hat{f}_2$ die Fourier-Transformierte von f_2 ist und im Sinne der $L^2(\mathbb{R})$-Konvergenz gilt:

$$\hat{f}_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty f_2(t)e^{-it\xi}\,d\xi\,.$$

Aus den Gleichungen (4.5) und (4.7) folgt:

$$||\hat{f}_2||_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int\limits_0^\infty |f_2(t)|^2\,dt = ||F||_{H^2}^2\,. \tag{4.10}$$

Die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung auf (4.9) liefert endlich unter Beachtung von (4.10), wenn wir noch $\sigma := \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ sowie $\vartheta := \mathrm{Im}(s)$ setzen:

$$|F(s)|^2 \le \frac{||F||_{H^2}^2}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{(\sigma - \frac{1}{2})^2 + (\vartheta - \xi)^2} = \frac{||F||_{H^2}^2}{2(\sigma - \frac{1}{2})}\,.$$

□

Bemerkung 4.2. Nach dem Paley-Wiener-Theorem hat jedes $F \in H^2(\mathrm{Re}\,s > \frac{1}{2})$ gemäß den Gleichungen (4.6) und (4.8) im Beweis von Satz 4.4 mit einer $L^2(0,\infty)$-Funktion f_2 die Darstellung

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \sqrt{2\pi} f_2(\vartheta) e^{-\vartheta(\sigma - \frac{1}{2})} e^{-i\vartheta t}\,d\vartheta\,,$$

wobei $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei. Dies entspricht genau der Gleichung (4.8) im Beweis von Lemma 4.4. Da die L^2-Norm nach dem Parsevalschen Theorem unter der Fourier-Transformation unverändert bleibt, gilt für die folgende L^2-Randfunktion $F_{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2} + i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

im Sinne der $L^2(0,\infty)$-Konvergenz des Integrals

$$F_{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+it\Big) := \int_0^\infty f_2(\vartheta)e^{-i\vartheta t}\,d\vartheta = \sqrt{2\pi}\hat{f}_2(t)$$

zum einen die Beziehung

$$\begin{aligned}||F||_{H^2}^2 &= \frac{1}{2\pi}\sup_{\sigma>\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty \big|F(\sigma+it)\big|^2\,dt = \sup_{\sigma>\frac{1}{2}}\int_0^\infty \big|f_2(\vartheta)\big|^2 e^{-2\vartheta(\sigma-\frac{1}{2})}\,d\vartheta\\ &= \int_0^\infty \big|f_2(\vartheta)\big|^2\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Big|F_{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^2\,dt\,,\end{aligned}$$

und zum anderen

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\sigma\downarrow\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty \Big|F(\sigma+it)-F_{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\Big|^2\,dt = \lim_{\sigma\downarrow\frac{1}{2}}\int_0^\infty \big|f_2(\vartheta)\big|^2\cdot\Big(1-e^{-\vartheta(\sigma-\frac{1}{2})}\Big)^2\,d\vartheta = 0\,.$$

In der Theorie der Hardy-Räume wird auch noch gezeigt, dass die L^2-Randfunktion $F_{\frac{1}{2}}$ einer H^2-Funktion F sich punktweise fast überall als nicht tangentialer Limes von F durch Grenzübergang zum Rand ergibt, doch haben wir hiervon keinen Gebrauch gemacht. Für ein allgemeines Studium der Hardy-Räume verweisen wir auf die Lehrbücher von Garnett [9], Hoffman [10] und Koosis[12].

4.2. **Der Hadamardsche Dreikreisesatz.**

Satz 4.5. *Es sei* $0<r_1<r_2<r_3$ *und* $f:\Omega\to\mathbb{C}$ *holomorph auf dem offenen Kreisring* $\Omega\subset\mathbb{C}$ *mit* $\Omega:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,r_1<|z|<r_3\}$. *Es möge* f *eine holomorphe Fortsetzung über* $\overline{\Omega}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,r_1\le|z|\le r_3\}$ *hinaus haben, welche wir ebenfalls mit* f *bezeichnen. Ist dann* $M_j:=\max\limits_{|z|=r_j}|f(z)|$ *für* $j=1,\,2,\,3,$ *dann gilt*

$$M_2^{\log\frac{r_3}{r_1}} \le M_1^{\log\frac{r_3}{r_2}}\cdot M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}}\,,$$

wobei $0^\alpha:=0$ *für* $\alpha>0$ *vereinbart sei.*

Beweis. Definiere die geschlitzten Kreisringe

$$\begin{aligned}\Omega_- &:= \{re^{i\varphi}\,|\,r_1<r<r_3\ \&\ -\pi<\varphi<\pi\}\quad\text{bzw.}\\ \Omega_+ &:= \{re^{i\varphi}\,|\,r_1<r<r_3\ \&\ 0<\varphi<2\pi\}\end{aligned}$$

mit den Abschlüssen $\overline{\Omega}_-=\overline{\Omega}_+=\overline{\Omega}$. Für festes $\lambda\in\mathbb{R}$ sind dann die beiden Abbildungen $\Phi_-:\Omega_-\to\mathbb{C}$ bzw. $\Phi_+:\Omega_+\to\mathbb{C}$ mit $\Phi_-(z):=z^\lambda f(z)$, $\Phi_+(z):=(-z)^\lambda f(z)$ holomorph, wenn $(\pm z)^\lambda:=\exp\big(\lambda\log(\pm z)\big)$ mit dem Hauptzweig log des Logarithmus gesetzt wird, und es gilt wegen $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\big|\Phi_-(z)\big| &= |z|^\lambda\cdot\big|f(z)\big|\quad\forall z\in\Omega_-\quad\text{bzw.}\\ \big|\Phi_+(z)\big| &= |z|^\lambda\cdot\big|f(z)\big|\quad\forall z\in\Omega_+\,,\end{aligned}$$

so dass $|\Phi_-|$ bzw. $|\Phi_+|$ nach Voraussetzung dieselbe stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ besitzen, die wir mit $\Psi:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}_0^+$ bezeichnen, $\Psi(z):=|z|^\lambda\cdot|f(z)|$. Ist eines der drei Maxima $M_j=0$, so auch die beiden anderen, da nach dem Identitätssatz $f = 0$ in $\overline{\Omega}$ folgen würde. Es sei daher $M_1, M_2, M_3 > 0$. Angenommen, Ψ würde seinen Maximalwert weder auf der Kreislinie $|z| = r_1$ noch auf der Kreislinie $|z| = r_3$ annehmen. Dann ist Φ_- nicht konstant in Ω_-, und nach dem schwachen Maximumprinzip, angewendet auf Φ_+, gibt es ein r_* mit $r_1 < r_* < r_3$ bzw.

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} \Psi(z) = \sup_{z\in\Omega_+} |\Phi_+(z)| = |\Phi_-(r_*)| \,.$$

Es ist wegen $r_* \in \Omega_-$ die Funktion Φ_- nach dem starken Maximumprinzip auf Ω_- konstant. Aus diesem Widerspruch folgt, dass Ψ sein Maximum bereits auf $\partial\Omega$ annimmt. Hieraus folgt nun

$$\Psi(z) \le \max\left(r_1^\lambda M_1 \,,\, r_3^\lambda M_3\right) \qquad \forall z \in \overline{\Omega} \,,$$

und insbesonders für jedes z mit $|z| = r_2$:

$$|f(z)| \le \max\left(r_1^\lambda\, r_2^{-\lambda} M_1 \,,\, r_3^\lambda\, r_2^{-\lambda} M_3\right) .$$

Wir wählen nun λ so, dass $r_1^\lambda M_1 = r_3^\lambda M_3$ gilt, also

$$\lambda = -\log\left(\frac{M_3}{M_1}\right) / \log\left(\frac{r_3}{r_1}\right) .$$

Mit diesem λ folgt endlich $M_2 \le (\frac{r_2}{r_1})^{-\lambda} M_1$ bzw.

$$\begin{aligned} M_2^{\log\frac{r_3}{r_1}} &\le \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\log\frac{M_3}{M_1}} \cdot M_1^{\log\frac{r_3}{r_1}} = e^{\log\left(\frac{M_3}{M_1}\right)\cdot\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \cdot M_1^{\log\frac{r_3}{r_1}} \\ &= \left(\frac{M_3}{M_1}\right)^{\log\frac{r_2}{r_1}} \cdot M_1^{\log\frac{r_3}{r_1}} = M_1^{\log\frac{r_3}{r_2}} \cdot M_3^{\log\frac{r_2}{r_1}} \,. \end{aligned}$$

□

4.3. Die Ungleichung von Borel-Carathéodory.

Satz 4.6. *Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von $\overline{B}_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le R\}$. Zusätzlich bezeichne noch $B_R = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt. Dann gilt für jedes holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $|z| = r < R$ die Ungleichung*

$$\big|f(z)\big| \le \frac{R+r}{R-r} \cdot \big|f(0)\big| + \frac{2r}{R-r} \max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) \,.$$

Beweis. Aufgrund von $-\frac{2r}{R-r}|c| \le \frac{2r}{R-r}\operatorname{Re}(c)$ ist das Resultat für konstantes $f(z) = c$ trivial. Wir nehmen daher an, f ist nicht konstant in $\overline{B_R}$, und setzen vorläufig $f(0) = 0$ voraus. Dann ist

$$U_f(R) := \max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) > 0$$

sowie

$$U_f(R) = \sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z)$$

nach dem Maximumprinzip, angewendet auf die harmonische Funktion $\operatorname{Re} f$. Infolge dieser Ungleichungen gilt für alle z mit $|z| \le R$

$$\begin{aligned} |2U_f(R) - f(z)| &\ge \operatorname{Re}\big(2U_f(R) - f(z)\big) = 2U_f(R) - \operatorname{Re} f(z) \\ &\ge U_f(R) > 0 \,, \end{aligned}$$

so dass die Hilfsfunktion

$$\phi(z) := \frac{f(z)}{2U_f(R) - f(z)} \tag{4.11}$$

sogar in einer offenen Umgebung von $|z| \leq R$, die Teilmenge von Ω ist, holomorph ist. Da wir noch den Fall $f(0) = 0$ betrachten, ist

$$\phi(0) = 0\,. \tag{4.12}$$

Nun gilt aber auch für $f = u + iv$ mit $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ und $|z| \leq R$, wenn wir zur Abkürzung $u = u(z)$, $v = v(z)$ setzen:

$$\left|\phi(z)\right|^2 = \frac{u^2 + v^2}{\left(2U_f(R) - u\right)^2 + v^2} \leq 1 \tag{4.13}$$

wegen

$$\begin{aligned} & u^2 + v^2 \leq 4U_f(R)^2 - 4U_f(R)u + u^2 + v^2 \\ \Leftrightarrow\, & U_f(R)^2 \geq U_f(R)u \\ \Leftrightarrow\, & U_f(R) \geq u\,. \end{aligned}$$

Das Schwarzsche Lemma kann wegen Gleichung (4.12) und Ungleichung (4.13) auf die Funktion $\tilde{\phi} : B_1 \to B_1$ mit $\tilde{\phi}(w) := \phi(Rw)$ angewendet werden, und liefert für $|w| < 1$:

$$\left|\tilde{\phi}(w)\right| = \left|\phi(Rw)\right| \leq |w|\,.$$

Setzt man $w = \frac{z}{R}$ mit $|z| = r < R$, so folgt

$$\left|\phi(z)\right| \leq \frac{r}{R} < 1\,. \tag{4.14}$$

Aus der Hilfsfunktion in (4.11) erhalten wir

$$f(z) = \frac{2U_f(R) \cdot \phi(z)}{1 + \phi(z)}\,,$$

und hieraus folgt mit Ungleichung (4.14):

$$\left|f(z)\right| \leq \frac{2U_f(R)\left|\phi(z)\right|}{1 - \left|\phi(z)\right|} \leq \frac{2U_f(R)\frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2rU_f(R)}{R - r}\,.$$

Die Borel-Carathéodory-Ungleichung ist also für $f(0) = 0$ gezeigt. Ist dagegen $f(0)$ nicht Null, so wenden wir das Resultat auf $f(z) - f(0)$ an, und erhalten aus

$$\begin{aligned} \left|f(z)\right| &\leq \left|f(0)\right| + \left|f(z) - f(0)\right| \\ &\leq \left|f(0)\right| + \frac{2r}{R - r} \max_{|w|=R} \operatorname{Re}(f(w) - f(0)) \\ &\leq \left|f(0)\right| + \frac{2r}{R - r}\left|f(0)\right| + \frac{2r}{R - r} \max_{|w|=R} \operatorname{Re} f(w) \end{aligned}$$

die allgemeine Ungleichung. □

Bemerkung 4.3. Für weitere Beweise dieses Satzes sowie für eine systematische Behandlung anderer Sätze dieser Art verweisen wir auf die Lecture Notes von Kresin und Maz'ya [13].

4.4. **Eine Umkehrformel für Dirichlet-Reihen.**

Das exponentielle Integral $\mathrm{Ei} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}_- := \big\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z \notin (-\infty, 0] \big\}$ ist gegeben durch $\mathrm{Ei}(z) := \gamma + \log z + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!}$. Es hat die Ableitung $\frac{d}{dz}\,\mathrm{Ei}(z) = \frac{1}{z} e^z$, und zudem gilt das folgende

Lemma 4.1. Darstellung des exponentiellen Integrals

Es seien $\sigma, t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$. Dann gilt für $z := \sigma + it$ die Integraldarstellung

$$\mathrm{Ei}(z) = i\pi \,\mathrm{sign}\big(\mathrm{Im}(z)\big) + \int\limits_0^\infty \frac{e^{z-u}}{z-u}\, du$$

mit der Fehlerabschätzung

$$\Big| \int\limits_0^\infty \frac{e^{z-u}}{z-u} \Big| \leq \frac{e^\sigma}{|t|}\,.$$

Eine Herleitung dieser Integraldarstellung findet sich im Preprint [14]. Die Fehlerabschätzung ergibt sich sofort aus

$$\Big| \int\limits_0^\infty \frac{e^{z-u}}{z-u}\, du \Big| \leq \int\limits_0^\infty \frac{\big|e^{(\sigma-u)+it}\big|}{|(\sigma-u)+it|}\, du \leq \int\limits_0^\infty \frac{e^{\sigma-u}}{|t|}\, du = \frac{e^\sigma}{|t|}\,.$$

Lemma 4.2. *Es seien $b > 0$, $T > 0$. Dann hat man für $0 < a < 1$:*

$$\Big| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}\, ds \Big| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^b}{T|\log a|}$$

und für $a > 1$:

$$\Big| 1 - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}\, ds \Big| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a^b}{T \log a}\,.$$

Bemerkung 4.4. Integriert wird hier über das Geradensegment von $b - iT$ bis $b + iT$.

Beweis. Betrachte zunächst $0 < a < 1$. Dann ist nach Lemma 4.1 durch

$$f_a(s) := \int\limits_0^\infty \frac{e^{s\log(a)-u}}{s\log(a) - u}\, du$$

eine für $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorphe Stammfunktion von $\frac{a^s}{s}$ gegeben mit

$$\big| f_a(b+iT) - f_a(b-iT) \big| \leq 2 \frac{e^{b\log(a)}}{|T \log a|}\,.$$

Wenn diese Fehlerschranke noch durch 2π geteilt wird, ergibt sich die erste Abschätzung des Lemmas. Ist dagegen $a > 1$, so ist $g_a(s) := \mathrm{Ei}(s \log a)$ nach Lemma 4.1 eine holomorphe

Stammfunktion von $\frac{a^s}{s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und wir erhalten wegen $T > 0$:

$$\Big|2\pi i - \big(\underbrace{g_a(b+iT) - g_a(b-iT)}_{=\int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}\,ds}\big)\Big| = \Big|2\pi i - \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s}\,ds\Big|$$

$$= \Big|\int\limits_0^\infty \frac{e^{(b-iT)\log(a)-u}}{(b-iT)\log(a)-u}\,du - \int\limits_0^\infty \frac{e^{(b+iT)\log(a)-u}}{(b+iT)\log(a)-u}\,du\Big| \le 2\frac{e^{b\log a}}{T\log a}\,.$$

□

Lemma 4.2 spielt eine wichtige Rolle, um aus den Eigenschaften einer Dirichletschen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ Abschätzungen für Koeffizientensummen der Form $\sum\limits_{n\le x} c_n$ bzw. $\sum\limits_{n\le x} \frac{c_n}{n^w}$ zu erhalten. Das liefert folgendes Hauptresultat:

Satz 4.7. Umkehrformel für Dirichlet-Reihen

Die Dirichlet-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\,, \qquad c_n \in \mathbb{C}\,,$$

sei für $\mathrm{Re}(s) > 1$ *absolut konvergent, genauer möge es Konstanten* $\alpha, \beta > 0$ *sowie* $\sigma_* > 1$ *geben, so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^\sigma} \le \frac{\beta}{(\sigma-1)^\alpha} \tag{4.15}$$

für alle σ *mit* $1 < \sigma \le \sigma_*$ *gilt. Es sei* $\phi : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ *eine positive und monoton wachsende Funktion mit*

$$|c_n| \le \phi(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,. \tag{4.16}$$

Dann gilt für jedes halbzahlige $x = N + \frac{1}{2}$ *mit* $N \in \mathbb{N}$*, jedes* $T > 0$ *sowie für jedes* $w = u + iv$ *und jedes* $b > 0$ *mit* $1 < u + b \le \sigma_*$ *und* $v \in \mathbb{R}$*:*

$$\sum_{n<x} \frac{c_n}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} f(w+s)\frac{x^s}{s}\,ds + \mathcal{O}\Big(\frac{x^b}{T\cdot(u+b-1)^\alpha}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\phi(2x)\,x^{1-u}\log x}{T}\Big)\,,$$

wobei die Fehlerkonstanten zu den beiden $\mathcal{O}$*-Termen unabhängig von* x*,* T*,* b *und* w *gewählt werden können.*

Beweis. Nach Lemma 4.2 gilt mit einem in x, T, b und w gleichmässigen $\mathcal{O}$-Fehlerterm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{c_n}{n^w} \Big(\frac{x}{n}\Big)^s \frac{ds}{s} = \sum_{n<x} \frac{c_n}{n^w} + \mathcal{O}\Big(\frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{u+b}\big|\log\frac{x}{n}\big|}\Big)\,,$$

wenn man dort mit den natürlichen Zahlen der Reihe nach die Werte $a := \frac{x}{n}$ wählt und die Fälle $x > n$ bzw. $x < n$ unterscheidet. Da x halbzahlig ist, folgt zudem

$$\Big|\log\frac{x}{n}\Big| > 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Auf dem Integrationsweg von $b-iT$ bis $b+iT$ ist $\mathrm{Re}(s+w)=u+b>1$, und daher dort die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^{w+s}}$ sowohl absolut als auch gleichmäßig konvergent nach Voraussetzung. Die Vertauschung von Summation und Integration ist somit erlaubt und liefert

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} f(w+s)\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n<x}\frac{c_n}{n^w}+\mathcal{O}\Big(\frac{x^b}{T}\cdot S_1\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{x^b}{T}\cdot S_2\Big) \tag{4.17}$$

mit

$$S_1:=\sum_{\substack{n=1\\ n<\frac{1}{2}x\,\vee\, n\geq 2x}}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^{u+b}|\log\frac{x}{n}|}\,,\qquad S_2:=\sum_{\substack{n=1\\ \frac{1}{2}x<n<2x}}^{\infty}\frac{|c_n|}{n^{u+b}|\log\frac{x}{n}|}\,.$$

In der Summe S_1 sind alle Terme $|\log\frac{x}{n}|$ mindestens so groß wie $\log 2$, so dass gemäß der Ungleichung (4.15) mit $\sigma:=u+b$ gilt:

$$S_1=\mathcal{O}\left(\frac{1}{(u+b-1)^{\alpha}}\right)\,. \tag{4.18}$$

Nun schätzen wir mit Hilfe von (4.16) den Ausdruck $x^{u+b}\cdot S_2$ folgendermaßen ab:

$$x^{u+b}\cdot S_2\leq 2^{\sigma_*}\cdot\phi(2x)\cdot\sum_{\substack{n=1\\ \frac{1}{2}x<n<2x}}^{\infty}\frac{1}{|\log\frac{x}{n}|}\,, \tag{4.19}$$

wobei wir für $\frac{1}{2}x<n<2x$ die Ungleichungen $\frac{x}{n}<2$, $(\frac{x}{n})^{u+b}<2^{\sigma_*}$ sowie $|c_n|\leq\phi(2x)$ zu beachten haben. Mit der allgemeinen Ungleichung

$$\log(1+y)\geq\frac{y}{1+y}\,,\quad y\geq 0\,,$$

folgt für $\frac{1}{2}<\frac{x}{n}<1$:

$$\Big|\log\frac{x}{n}\Big|=\log\Big(1+\frac{n-x}{x}\Big)\geq\frac{\frac{n-x}{x}}{1+\frac{n-x}{x}}=\frac{|x-n|}{n}\geq\frac{|x-n|}{2x}\,,$$

und analog für $1<\frac{x}{n}<2$:

$$\Big|\log\frac{x}{n}\Big|=\log\frac{x}{n}=\log\Big(1+\frac{x-n}{n}\Big)\geq\frac{\frac{x-n}{x}}{1+\frac{x-n}{n}}=\frac{x-n}{x}\geq\frac{|x-n|}{2x}\,.$$

Hieraus folgt dank der Halbzahligkeit von x:

$$\sum_{\substack{n=1\\ \frac{x}{2}<n<2x}}^{\infty}\frac{1}{|\log\frac{x}{n}|}\leq 2x\cdot\sum_{\substack{n=1\\ \frac{x}{2}<n<2x}}^{\infty}\frac{1}{|x-n|}=\mathcal{O}(x\cdot\log x)\,,$$

sowie mit (4.19):

$$S_2=\mathcal{O}\big(\phi(2x)\cdot x^{1-u-b}\cdot\log x\big)\,. \tag{4.20}$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun aus (4.17), (4.18) und (4.20). $\square$

4.5. **Der Satz von Vitali.**

Satz 4.8. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Besitzt dann die Menge M aller Punkte $z \in G$, für die $\big(f_n(z)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, einen Häufungspunkt in G, so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt konvergent in G.*

Beweis. Nach dem Satz von Montel besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Teilfolge mit holomorpher Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$. Die Menge M der Konvergenzpunkte aus G besitze einen Häufungspunkt in G, so dass nach dem Identitätssatz jede andere kompakt konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen f konvergiert. Angenommen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere nicht kompakt gegen f. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset G$, $K \neq \emptyset$, ein $\varepsilon > 0$ sowie eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\max_{z\in K} \big| f(z) - f_{n_j}(z) \big| \geq \varepsilon \qquad \forall j \in \mathbb{N}\,. \tag{4.21}$$

Mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch die Folge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ lokal beschränkt, und nach dem Satz von Montel besitzt $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine in G kompakt konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion ebenfalls f sein muss, im Widerspruch zu (4.21). □

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle besonders bei Herrn Thomas Stöter bedanken, der mein Skript in ein brauchbares Latex-File verwandelt hat und mich durch sorgfältiges Korrekturlesen unterstützt hat.

Literatur

[1] Báez-Duarte, L.: *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis.* Atti Acad. Naz. Lincei **14** (2003), 5–11.
[2] Báez-Duarte, L., Balazard, M., Landreau, B., Saias, E.: *Notes sur la fonction ζ de Riemann, 3.* Adv. Math. **149** (2000), 130–144.
[3] Bagchi, B.: *On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **116** (2006), no. 2, 137–146.
[4] Balazard, M. and Saias, E.: *Notes sur la fonction ζ de Riemann. IV. (French) [Notes on the Riemann ζ-function. IV]* Adv. Math. **188** (2004), no. 1, 69–86.
[5] Beurling, A.: *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space.* Acta Math. **81** (1949), 239–255.
[6] Beurling, A.: *A closure problem related to the Riemann Zeta-function.* Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312–314.
[7] Burnol,J.-F.: *A note on Nyman's equivalent formulation of the Riemann hypothesis*, Algebraic methods in statistics and probability (Notre Dame, IN, 2000), Contemp. Math., **287**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001), 23–26.
[8] Edwards, H.M.: *Riemann's zeta function.* Dover Publications, Mineola, New York, 2001.
[9] Garnett, J. B.: *Bounded analytic functions.* Revised first edition. Graduate Texts in Mathematics, 236. Springer, New York (2007).
[10] Hoffman, K.: *Banach spaces of analytic functions*, Dover Publication, (2007).
[11] Knopfmacher, J.: *Abstract Analytic Number Theory.* Dover Publ., New York, 1975 (1990).
[12] Koosis, P.: *Introduction to H_p-spaces*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
[13] Kresin, G. and Maz'ya, V.: *Sharp real-part theorems.* Springer-Verlag, Belin, Heidelberg, 2007.
[14] Kunik, M.: *On the formulas of $\pi(x)$ and $\psi(x)$ of Riemann and von-Mangoldt*, Preprint Nr. 09/2005, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, 2005.
[15] Kunik, M. and Lutz G. Lucht: *Power series with the von Mangoldt function*, Preprint Nr. 04/2010, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, 2010.
[16] Lax, P.D.: *Translation invariant spaces*, Acta Math. **101** (1959), 163–178.

[17] Lorenz, F.: *Funktionentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin (1997).
[18] Nyman, B.: *On some groups and semigroups of translations*, Thesis, Uppsala (1950).
[19] Remmert, R.: *Funktionentheorie 2*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
[20] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1987.

Universität Magdeburg, IAN, Gebäude 02, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg, Germany

E-mail address: matthias.kunik@ovgu.de