

**Funktionentheorie für Mathematiker (SS 2019)**

**Übungsblatt 1**

1. Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , so dass der Ausdruck  $z + \frac{1}{z}$  reell ist.
2. Zu einer gegebenen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  sei  $z' \in \mathbb{C}$  diejenige Zahl, welche durch Spiegelung des Punktes  $z$  an der imaginären Achse hervorgeht. Geben Sie einen rechnerischen Ausdruck für  $z'$  in Abhängigkeit von  $z$  an.
3. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f$  ob der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  existiert und falls ja, bestimmen Sie diesen Grenzwert.

a)  $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$

b)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$

c)  $f(z) = \frac{z+i}{|z|-1}$

d)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

4. Gegeben seien  $a, c \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass die Punktmenge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : a|z|^2 + bz + \bar{b}z + c = 0\}$$

eine Kreislinie oder eine Gerade ist, falls  $ac < |b|^2$  gilt.

5. Zeigen Sie, dass die reellen Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ , versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation, einen Körper bilden, der zu  $\mathbb{C}$  isomorph ist.