

Funktionentheorie für Mathematiker (SS 2019)

Übungsblatt 2

1. Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ so dass die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind

a) $f_1(z) := \frac{1}{z}$

b) $f_2(z) := \sin(|z|^2)$

2. Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen holomorph sind

a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x + iy) := x^2 + y^2 - 2ixy$

b) $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(x + iy) := \frac{ix+y}{x^2+y^2}$

c) $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) := z^2|z|$

3. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare holomorphe Funktion

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung von f holomorph ist

b) Zeigen Sie, dass sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von f harmonisch ist, das heißt $\Delta u = 0 = \Delta v$

4. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls eine der folgenden Bedingungen gilt

a) u ist konstant

b) v ist konstant

c) $|f|$ ist konstant

5. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar, aber nicht analytisch ist.

- b) Gegeben sei die Menge $S := \{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, 1]\}$. Bestimmen und skizzieren Sie den Abschluss von S , das heißt \overline{S} , und zeigen Sie, dass der topologische Raum $(\overline{S}, \mathcal{T}_{\overline{S}})$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist. Hierbei ist $\mathcal{T}_{\overline{S}}$ die von der Standardtopologie in \mathbb{R}^2 auf \overline{S} induzierte Topologie.
6. a) Finden Sie Potenzreihen, die in genau den folgenden Mengen $M \subset \mathbb{C}$ konvergieren

$$(i) \mathbb{C} \quad (ii) \{\pi\} \quad (iii) D_1(0) \quad (iv) \overline{D_1(0)} \quad (v) \overline{D_1(0)} \setminus \{-1\}$$

- b) Schreiben Sie die folgenden Funktionen als Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ und bestimmen Sie jeweils, in welchem Gebiet diese Entwicklung zutrifft

$$(i) \frac{1}{2019z + 42}, \quad (ii) \frac{1}{z^2 - iz + 12}$$