Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. G. Warnecke, M.Sc. Hazem Yaghi

04. April 2019

# Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

## 1. Übung

**Aufgabe 1** (5 Punkte)**.** Für einen reellen Parameter $\gamma$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} & x_1 & & & + & 2x_3 & & & - & x_5 & = & 3, \\ & & & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & & = & 2, \\ & 2x_1 & & & & & - & x_4 & + & x_5 & = & -1, \\ - & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & - & 4x_5 & = & \gamma. \end{array}$$

Man bestimme, für welche Werte von $\gamma$ das obige System eine Lösung hat und für welche nicht. Im ersten Fall bestimme man auch alle Lösungen.

**Aufgabe 2** (7 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

(a) Leiten Sie mittels vollständiger Induktion eine Formel für die Ableitung $f^{(k)}(x), k \in \mathbb{N}$ her.
**Hinweis:** Die Rechnung lässt sich durch geeignetes Umformen vereinfachen.

(b) Geben Sie für die oben definierte Funktion $f$ das Taylor-Polynom der Ordnung $n$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und das Restglied in der Lagrange'schen Form an.

(c) Zeigen Sie für $x = 1/3$ die Fehlerabschätzung

$$\left| f\left(\frac{1}{3}\right) - T_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

(d) Bestimmen Sie den minimalen Grad $n$ des Taylor-Polynoms, so dass bei der näherungsweisen Berechnung von $\ln(2)$ mittels $T_n(1/3)$ der absolute Fehler höchstens $10^{-2}$ ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte). (a) Gegeben sei der folgende Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung von $y = \ln(x)$.

$$
\begin{array}{lcl}
p_0 & = & 1 \\
v_0 & = & x \\
\texttt{for}\ i & = & 1,\ldots,n \quad \texttt{do} \\
\quad p_i & = & 2p_{i-1} \\
\quad v_i & = & \sqrt{v_{i-1}} \\
\quad y_i & = & (v_i - 1)p_i \\
\texttt{end} & &
\end{array}
$$

Man zeige, dass $\lim_{i\to\infty} y_i = \ln(x)$ gilt.

(b) Programmieren sie den Algorithmus für $x = 2$ und $n = 70$. Stellen sie den Fehler $|y_i - \ln(x)|$ graphisch mit logarithmischer Skalierung dar (Matlabbefehl: `semilogy`).

(c) Diskutieren sie das Verhalten des Fehlers.

(Die Aufgaben sind am 11. April 2019 in der Übung abzugeben.)