

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

10. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^9$ im Intervall $[a, b] = [-1, 1]$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_n vom Grad n zu äquidistanten Stützstellen mit $x_0 = a$ und $x_n = b$ für $n = 2, 4, 8, 16$. Stellen Sie die Funktionen graphisch dar und vergleichen Sie den Fehler $\|f - p_n\|_\infty$.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien die Differenzenquotienten wie in der Vorlesung definiert, d.h.

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ &\vdots \\ f[x_mx_{m-1} \dots x_0] &= \frac{f[x_m \dots x_1] - f[x_{m-1} \dots x_0]}{x_m - x_0}. \end{aligned}$$

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach

- (a) *Symmetrie*, d.h. für alle Permutationen der x_0, \dots, x_m erhält man den gleichen Wert.
- (b) *Linearität*: $f = \alpha g + \beta h \Rightarrow f[x_m \dots x_0] = \alpha \cdot g[x_m \dots x_0] + \beta \cdot h[x_m \dots x_0]$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (c) *Leibniz-Regel*:

$$f = u \cdot v \Rightarrow f[x_m \dots x_0] = \sum_{k=0}^m u[x_0 \dots x_k] v[x_k \dots x_m]$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Gegeben sei das überbestimmte lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^N$, $n < N$ sei und A vollen Rang habe, d.h. $\text{rg}(A) = n$ gelte. Bestimmen Sie eine Näherungslösung x , die das Residuum $\|Ax - b\|_2$ minimiert. Ist diese Lösung eindeutig bestimmt?

(Die Aufgaben sind am 20. Juni 2019 in der Übung abzugeben.)