

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

4. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte). Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) Die der 1–Norm zugeordnete Matrixnorm ist die Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

(b) Die der 2–Norm zugeordnete Matrixnorm ist die Spektralnorm

$$\|A\|_2 = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A^T A)} \sqrt{\lambda}$$

(c) Für symmetrische Matrizen gilt $\|A\|_2 = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|$.

Hinweis: Bezeichnung: $\text{Spec}(A) := \{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Sei $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm und κ die zugehörige Konditionszahl. Zeigen Sie für reguläre $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die folgenden Aussagen

(a) $\kappa(A \cdot B) \leq \kappa(A)\kappa(B)$,

(b) $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$,

(c) $\kappa(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie $\kappa_1(A)$, $\kappa_\infty(A)$ und $\|A\|_F \|A^{-1}\|_F$.
- (b) Wie lässt sich $\kappa_2(A)$ bestimmen, ohne A^{-1} zu berechnen?

(Die Aufgaben sind am 02. Mai 2019 in der Übung abzugeben.)