

Einführung in die Numerik

Sommersemester 2019

7. Übung

Hinweis: In den folgenden Aufgaben bezeichnet x^k jeweils die k -te Iterierte eines Iterationsverfahrens, nicht etwa eine k -te Potenz.

Aufgabe 1 (8 Punkte). Um die Konvergenz der Iteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ für eine Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x)$, $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz zu zeigen, benötigt man die folgenden Voraussetzungen:

- Es gilt $\Phi(D) \subset D$ für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^N$.
 - Es gibt eine Vektornorm $\|\cdot\|$, so dass $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$, $\alpha < 1$ für beliebige $x, y \in D$ gilt. (Φ ist „kontrahierend“.)
- (a) Sei $J(x)$ die Jacobi-Matrix von Φ und $\|\cdot\|$ eine beliebige einer Vektornorm zugeordnete Matrixnorm. Zeigen Sie, dass die Kontraktionsbedingung erfüllt ist, wenn $\|J(x)\| \leq L < 1$ für alle $x \in D$, D konvex, gilt.
- (b) Geben Sie für das System

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{10}x_1^2 + \sin x_2 \\x_2 &= \cos x_1 + \frac{1}{10}x_2^2\end{aligned}$$

ein (größtmögliches) Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ und eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ an, so daß die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

- (c) Man löse das System durch Fixpunktiteration. Die numerische Konvergenzordnung lässt sich aus drei aufeinanderfolgenden Iterationen bestimmen, wenn die exakte Lösung ξ bekannt ist, da für ein Verfahren p -ter Ordnung

$$\|x^{k+1} - \xi\| \approx C\|x^k - \xi\|^p, \quad k = 0, 1, \dots$$

gilt. Die daraus bestimmbare Näherung für p ist die numerische Konvergenzordnung \tilde{p} . Für die Fixpunktiteration stelle man \tilde{p} in Abhängigkeit von k graphisch dar. Als exakte Lösung ξ verwende man eine hinreichend genaue Iteration x^k , $k \gg 1$.

- (d) Man löse das Gleichungssystem mit dem Newton-Verfahren und vergleiche die Konvergenz beider Verfahren.

Aufgabe 2 (8 Punkte). Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}e^x + y &= 100 \\x + e^y &= 200\end{aligned}$$

- (a) Geben Sie ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung an und zeigen Sie so mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung $X^* := (x^*, y^*)$ in $[1, 10] \times [1, 10]$ besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

- (b) Bestimmen Sie mit dem Iterationsverfahren eine Näherungslösung $\tilde{X} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ so genau, dass

$$|e^{\tilde{x}} + \tilde{y} - 100| < 10^{-4}, \quad |\tilde{x} + e^{\tilde{y}} - 200| < 10^{-4}.$$

- (c) Geben Sie eine a-priori- und a-posteriori-Fehlerabschätzung für $\|\tilde{X} - X^*\|_\infty$ an.

(Die Aufgaben sind am 23. Mai 2019 in der Übung abzugeben.)