Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fachbereich Mathematik

Sebastian Debus

Proseminar „Konvexität“

Sommersemester 2023

Das Proseminar wendet sich an Mathematik Lehramtsstudierende, sowie Mathematikstudierende im 4. bzw. 6. Semester. Für eine erfolgreiche Teilnahme am Proseminar halten Sie einen ca. 60–75 minütigen Vortrag mit anschließender Diskussion. Darin sollen Sie zeigen, dass Sie in der Lage sind, aus der angegebenen Fachliteratur die wichtigen Inhalte zu extrahieren und in eigener Weise zu präsentieren. Dazu gehört auch, dass Sie sich eigene Gedanken über eine gute Wahl der Notation machen. Das primäre Ziel eines Proseminar-Vortrages ist, die Inhalte verständlich für die Mitstudierenden zu präsentieren und nicht die Inhalte möglichst komplex zu präsentieren – die Inhalte sollten natürlich auf jeden Fall korrekt präsentiert werden. Zum Vortrag sollen Sie ein schriftliches Handout von etwa 2–4 Seiten anfertigen.

In der Vorbesprechung am **25. Januar** um **14 Uhr** in G03-223 (oder via Zoom) werden die Vortragsthemen kurz vorgestellt, aber noch nicht vergeben. Bei Teilnahme via Zoom bitte eine E-Mail an `sebastian.debus@ovgu.de` senden. Eine Teilnahme am Seminar ist auch ohne Teilnahme an der Vorbesprechung möglich.

1 Themen

Im Rahmen des Proseminars lernen wir über Konvexgeometrie, d.h. dem Studium konvexer Mengen in einem Vektorraum. Die Konvexgeometrie hat zahlreiche Bezüge zu anderen Teilgebieten der Mathematik, wie etwa der Geometrie der Zahlen, der Funktionalanalysis, der diskreten Mathematik oder der algebraischen Geometrie, aber auch Anwendungen in der Optimierung, sowie konkrete Anwendungen, z.B. in der Logistik oder der Spieltheorie.
Jeder Seminarteilnehmende übernimmt einen der folgenden 15 Vorträge:

Vortrag 1: **Titel:** Konvexe Mengen und der Satz von Carathéodory
Inhalt: Konvexe Mengen, konvexe Hülle, Satz von Carathéodory, Minkowskisumme
Literatur: [1] Seiten 2–3, 5–8, 10–11; [6] Seiten 49–51, 53–56 (evtl. als Hilfe: [3], Seiten 10–12, 21–22)

Vortrag 2: **Titel:** Topologie konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$
Inhalt: Inneres, Abschluss, Erhaltung topologischer Eigenschaften unter Bildung der konvexen Hulle, algebraisch offene Menge
Literatur: [1] Seiten 45, 47–49, 111; [6] Seiten 32–36, 57, 62-63; [3] Seiten 24–25

Vortrag 3: **Titel:** Trennungssätze im $\mathbb{R}^n$
Inhalt: affine Räume, affine Hüllen, Dimension, Halbräume, Isolationssatz, weitere Trennungssätze
Literatur: [1] Seiten 42–47, 49, 105–107

Vortrag 4: **Titel:** Seiten, Extremalpunkte und der Satz von Minkowski
Inhalt: Extremalpunkte, Seiten und exponierte Seiten, Satz von Minkowski, Existenz von Extremalpunkten
Literatur: [1] Seiten 51–53; [6] Seiten 79–82, 86 (evtl. als Hilfe: [3] Seite 35ff)

Vortrag 5: **Titel:** Polytope und Polyeder
Inhalt: Polytope, Polyeder, Bilder von Polytopen unter Linearer Abbildungen, Fourier-Motzkin-Elimination, Beispiele
Literatur: [1] Seiten 8, 37; [6] Seite 105; [3] Seite 46; [7] Seiten 7–10

Vortrag 6: **Titel:** Seitenstruktur von Polyedern
Inhalt: Ecken, Kanten, Facetten, Seitenstruktur von Polyedern, Satz von Weyl-Minkowski
Literatur: [1] Seiten 54–55, 249-250; [6] Seiten 111–113; [7] Seite 51

Vortrag 7: **Titel:** Permutationspolytop und Birkhoffpolytop
Inhalt: Nähere Betrachtung des Permutationspolytops und kombinatorische Beschreibung seiner Seiten, Birkhoffpolytop, Satz von Birkhoff-von Neumann, Zusammenhang der beiden Polytope
Literatur: [1] Seiten 56-59, 254-255; [7] Seiten 17-20

Vortrag 8: **Titel:** Eulercharakteristik von Polytopen
Inhalt: Eulercharakteristik, Euler-Poincaré Formel, Beispiele
Literatur: [1] Seiten 28–32, 258–262

Vortrag 9: **Titel:** Zyklische Polytope
Inhalt: Momenten Kurve, Nachbarschaftspolytope, Gale's evenness Bedingung (ohne Beweis) in zwei Äquivalenten Formulierungen, Anzahl der Facetten eines zyklischen Polytopes
Literatur: [1] Seiten 67–70, [7] Seiten 11–16

Vortrag 10: **Titel:** Die Polare einer konvexen Menge
Inhalt: Polare, Beispiele, Bipolarsatz, selbstpolare Mengen
Literatur: [1] Seiten 143–145; [6] Seiten 100–101

Vortrag 11: **Titel:** Dualität von Polytopen
Inhalt: Ruckrichtung von Weyl-Minkowski, Seitenstruktur des dualen Polytops, Beispiel
Literatur: [1] Seiten 145, 250–252

Vortrag 12: **Titel:** Konvexe Kegel
Inhalt: Definition, spitze Kegel, Extremalpunkte und -strahlen, Zusammenhang zwischen dualem und polarem Kegel, Bidualität, Kegel der psd Matrizen und seine Seitenstruktur
Literatur: [1] Seiten 65–67, 78–82

Vortrag 13: **Titel:** Lineare Ungleichungen und lineare Programmierung
Inhalt: Fundamentalsatz linearer Ungleichungen, Farkas Lemma, Formulierung eines linearen Programmierungs-Problems, äquivalente Formulierungen, duales Problem und starke Dualität
Literatur: [6] Seiten 149–151, 157–161; [8] Seiten 4–7

Vortrag 14: **Titel:** Der Simplex-Algorithmus
Inhalt: Basislösungen eines linearen Gleichungssystems, Basislösungen als Extremalpunkte, Idee des Simplexalgorithmus, der Simplexalgorithmus

Literatur: [6] Seiten 163–165, 169–174;

Vortrag 15: **Titel:** Spektraeder
Inhalt: Spektraeder, Eigenschaften und Beispiele, Projektionen von Spektraedern, Semidefinite Programmierung
Literatur: [8] Seiten 7 – 13, (evtl. [5] Seiten 38–43)

Literatur

[1] A. Barvinok, A course in convexity, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 54, AMS, 2002

[2] M. Joswig, T. Theobald, Algorithmische Geometrie: Polyedrische und algebraische Methoden, 2008

[3] K. Leichtweiss, Konvexe Mengen. Springer, 1980.

[4] D. Plaumann, Konvexität. Vorlesungsskript, Uni Konstanz, WS 2011/12, `www.math.uni-konstanz.de/~plaumann/KonvexWS11/konvex.pdf`

[5] T. Theobald, Real Algebraic Geometry and Optimization, 2022 `https://www.math.uni-frankfurt.de/~theobald/ragopt/main.pdf`

[6] R. Webster, Convexity. Oxford University Press, 1994

[7] G. M. Ziegler, Lectures on Polytopes, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1995

[8] G. Blekherman, P. Parrilo, R. Thomas, Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry, MOS-SIAM Series on Optimization, Volume 13, 2012

`https://www.mit.edu/~parrilo/sdocag/SIAMBookFinalvNov12-2012.pdf`