

# Vorlesung

## Nichtparametrische und asymptotische Statistik

Claudia Kirch und Martin Wendler

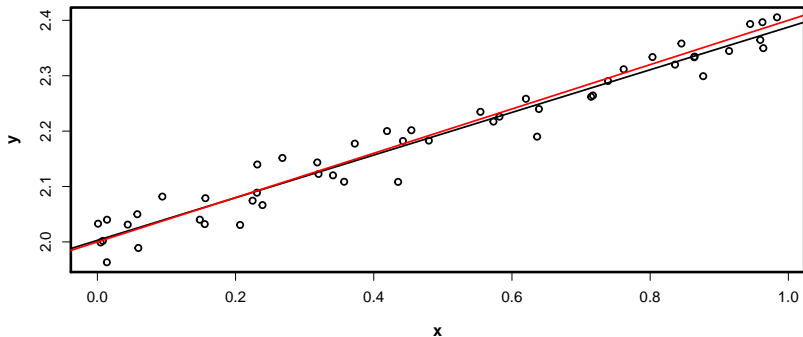
Wintersemester 2021/22

# Nichtparametrische Statistik

- Nichtparametrische Dichte-/Kurvenschätzung.

## Parametrisch: Z.B. lineare Regression

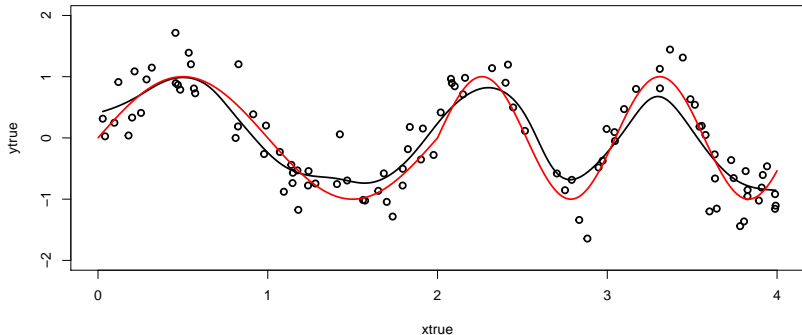
Passe eine lineare Funktion  $y = a + bx$  an:  
2 unbekannte Parameter  $a$  und  $b$ !



# Nichtparametrische Kurvenschätzung

Aber was macht man, wenn man keine parametrische Form für die Kurve annehmen möchte/kann?

Keine klassische Parameterschätzung mehr möglich:  
Kein endlich-dimensionaler Parameterraum mehr.



# Nichtparametrische Statistik

- Zwei Themengebiete:
  - Nichtparametrische Dichte-/Kurvenschätzung.
  - Klassische nichtparametrische Testverfahren:
    - Niveau wird auch bei kleinen Stichprobenumfängen und nicht-normalverteilten ZVn eingehalten.
    - I.d.R. höherer Fehler 2. Art im Vergleich zu parametrischen Tests etwa unter Normalverteilungsannahme aber oft niedriger bei anderen Verteilungen.
    - Viele nichtparametrische Tests sind auch robust gegenüber Ausreißern.
- Statistische Inferenz ohne explizite
  - Annahme einer parametrischen Struktur.
  - parametrische Verteilungsannahmen.
- In vielen Fällen erfordert die mathematische Analyse nichtparametrischer statistischer Verfahren asymptotische Methoden.

# Zentraler Grenzwertsatz

Voraussetzungen:

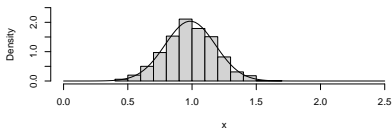
- $X_1, X_2, X_3, \dots$  unabhängig, identisch verteilt
- $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$

Dann:

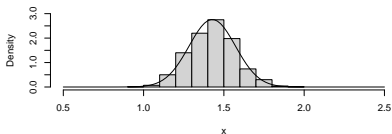
- $\sum_{i=1}^n X_i$  approximativ normalverteilt (nach Standardisierung)
- daher z.B. Gauß-Test bei großem Stichprobenumfang auch ohne Normalverteilung anwendbar

# Histogramm von Summen 100 unabhängiger ZVn

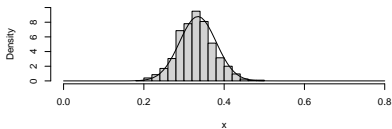
Normalverteilung



Exponential(0.7)



Bernoulli,  $p=1/3$



Poisson(1)



# Zentraler Grenzwertsatz

Voraussetzungen:

- $X_1, X_2, X_3, \dots$  unabhängig, identisch verteilt
- $0 < \text{Var}(X_i) < \infty$

Dann:

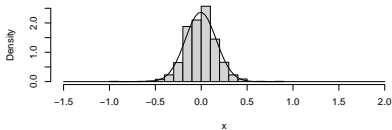
- $\sum_{i=1}^n X_i$  approximativ normalverteilt (nach Standardisierung)
- daher z.B. Gauß-Test bei großem Stichprobenumfang auch ohne Normalverteilung anwendbar

Kann man die Voraussetzungen abschwächen?

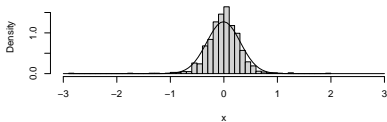


# Histogramm von Summen 100 unabhängiger ZVn

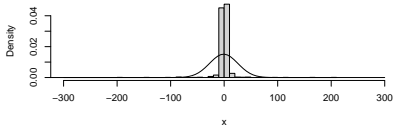
Student t mit 3 FG



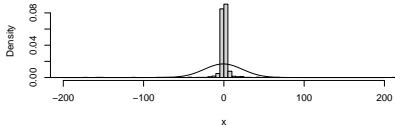
Student t mit 2 FG



Student-t mit 1 FG

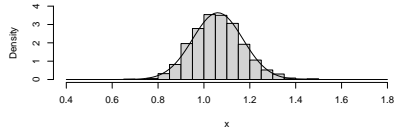
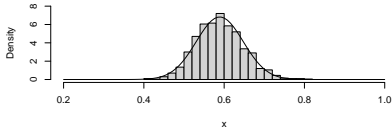
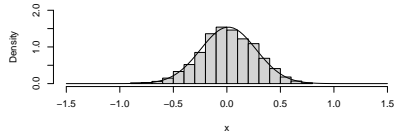
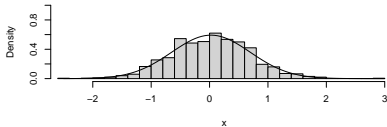


Cauchy-Verteilung



Die Annahme  $\text{Var}(X_i) < \infty$  lässt sich nicht abschwächen.

# Summen 100 abhängiger nicht-normalverteilter ZVn



Unter geeigneten Voraussetzungen an die Abhängigkeitsstruktur (auch unter nichtparametrischen Bedingungen) lässt sich die Voraussetzung der Unabhängigkeit abschwächen.

# Nichtparametrische und asymptotische Statistik

## Inhalt:

- Kern-Methoden
  - Nichtparametrische Dichteschätzer
  - Nichtparametrische Kurvenschätzung/Regression

# Nichtparametrische und asymptotische Statistik

## Inhalt:

- Kern-Methoden
- Klassische nichtparametrische Verfahren
  - am Beispiel des Zweistichproben-Lageproblems:
    - Permutationstests
    - Ordnungsstatistiken
    - Rangstatistiken
  - für verbundene Stichproben:
    - Signierte Rangstatistiken

# Nichtparametrische und asymptotische Statistik

## Inhalt:

- Kern-Methoden
- Klassische nichtparametrische Verfahren
- Asymptotik für klassische nichtparametrische Verfahren
  - Asymptotik linearer Rangstatistiken
  - Abhängigkeitsmaße und Unabhängigkeitstests

# Nichtparametrische und asymptotische Statistik

## Inhalt:

- Kern-Methoden
- Klassische nichtparametrische Verfahren
- Asymptotik für klassische nichtparametrische Verfahren
- Verallgemeinerte Grenzwertsätze und Anwendungen
  - Grenzwertsätze für Summen abhängiger Zufallsvariablen
  - Grenzwertverteilung für Transformationen von Summen ( $\delta$ -Methode)
  - Grenzwertsätze für  $U$ -Statistiken (Doppelsummen)

# Nichtparametrische und asymptotische Statistik

## Inhalt:

- Kern-Methoden
- Klassische nichtparametrische Verfahren
- Asymptotik für klassische nichtparametrische Verfahren
- Verallgemeinerte Grenzwertsätze und Anwendungen

## Voraussetzungen:

- Wahrscheinlichkeitstheorie.

## Umfang:

6 SWS (inklusive integrierter Übung)

- Variante 1: Nichtparametrische und asymptotische Statistik (9 ECTS)
- Variante 2: Nichtparametrische Statistik (6 ECTS):  
Bis 10. Dezember 2021.