

Aufgabe 3.1 Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen (a_n) mit $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und Beschränktheit:

1. $a_n = \frac{n^2}{n!}$

2. $b_n = \frac{(-2)^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} + (-2)^n}$

3. $c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}$; $c_0 = \sqrt{2}$

Aufgabe 3.2 Wir betrachten die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Bestimmen Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < 5 \cdot 10^{-4}$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 3.3 Beweisen Sie für die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{n^2 - 1}{4n^2 + 1}$ mithilfe der ε - n_0 -Definition, dass $g = \frac{1}{4}$ der Grenzwert ist.

Aufgabe 3.4 Untersuchen Sie diese Zahlenfolgen auf Konvergenz, bestimmte und unbestimmte Divergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$b_n = \frac{5n - 7n^2}{(n+1)^2 - 8n}$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$d_n = \frac{4^n - 1}{2^n + 1}$$

$$e_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$$

$$f_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$$

Aufgabe 3.5 Wir betrachten die rekursiv definierte Zahlenfolge (a_n) mit $a_0 = 5$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{6}{a_n} \right)$.

- (a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_1, \dots, a_6 .
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fällt.
- (c) Zeigen Sie, dass die Folge beschränkt ist.
- (d) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.